

4) Übungen

Lösungen mit Kommentar

online-Kurs

a) Ausschuss:

Von 12 Personen wählt man deren drei aus. Das ergibt $\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!}$ Möglichkeiten.

b) Teilmengen:

$\binom{20}{12} = \frac{20!}{8!12!}$ Möglichkeiten, von den 20 Elementen deren 12 auszuwählen.

Ab hier verzichte ich auf die Schreibweise mit Fakultäten.

c) Kommission:

$\binom{12}{3} \cdot \binom{15}{4} \cdot \binom{8}{2}$ Möglichkeiten, denn man wählt 3 von 12 aus der Partei A und gleichzeitig (d.h. "sowohl ... als auch") 4 von 15 aus der Partei B, usw.

d) Warengutscheine:

Diese Frage ist absichtlich ungenau gestellt.

Erstens: Wenn pro Person nur ein Gewinn möglich ist, dann erhält man $\binom{100}{15} \cdot \binom{85}{25}$

Möglichkeiten, wenn man zuerst die 100.- - Gutscheine verlost. Man kommt auf $\binom{100}{25} \cdot \binom{75}{15}$

Möglichkeiten, wenn man zuerst die 50.- - Gutscheine verlost. Das ergibt zweimal dasselbe.

Beweis: a) $\binom{100}{15} \cdot \binom{85}{25} = \frac{100!}{15!85!} \cdot \frac{85!}{25!60!}$, b) $\binom{100}{25} \cdot \binom{75}{15} = \frac{100!}{25!75!} \cdot \frac{75!}{15!60!}$

c) Im ersten Fall kürzt sich 85! weg, im zweiten Fall 75!, beides ist gleich $\frac{100!}{15!25!60!}$

Die vier Zahlen haben folgende Bedeutungen: Wenn man 100 verschiedene (unterscheidbare) Gewinne hätte, gäbe es 100! Möglichkeiten. Jetzt kann man die 15 Personen von den grossen Gewinnen und die 25 Personen von den kleinen Gewinnen nicht unterscheiden. Die 60 Leute, die leer ausgehen, kann man auch nicht unterscheiden.

Zweitens: Wenn eine Person einen grossen und einen kleinen Gewinn machen könnte, dann hat man $\binom{100}{15} \cdot \binom{100}{25}$ Möglichkeiten der Gewinnverteilung.

Drittens: Wenn noch mehr Preise auf eine Person fallen dürfen, dann ist diese Aufgabe erst am Ende dieses Kapitels lösbar. Die Lösung beträgt dann $\binom{114}{15} \cdot \binom{124}{25}$. Es ist empfehlenswert, diese Aufgabe am Schluss des Kapitels nochmals anzusehen.

e) Party:

Wenn zwei Personen miteinander anstossen, dann werden in diesem Moment die beiden aus der gesamten Gesellschaft ausgewählt. Es gibt $\binom{25}{2} = 300$ Möglichkeiten (der Auswahl von 2 aus 25) und somit werden 300 Mal die Gläser klingen (sofern nicht drei oder vier gleichzeitig miteinander anstossen).

f) Party:

Jetzt kennt man die Anzahl Leute nicht. Also löst man $\binom{n}{2} = 253$ und erhält $n = 23$.

Die vom Rechner angegebene zweite Lösung $n = -22$ ist von den Binomialkoeffizienten her korrekt, macht aber von der Aufgabenstellung her keinen Sinn.

g) Wörter:

Wir betrachten zunächst ein beliebiges 6-buchstabiges Wort mit genau 2 Vokalen: AUXCGT. Da hat man folgende Anzahlen:

6 6 20 20 20 20

Nun kann man noch die Positionen der Vokale variieren. Dazu wählt man 2 Positionen aus von 6.

Die Lösung lautet $\binom{6}{2} \cdot 6^2 \cdot 20^4$.

h) Würfeln:

Ich stelle die Würfelsequenz wie folgt dar: N6NN66NN. Dabei bedeutet N eine "Nicht-6".

Es gibt also $5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ Möglichkeiten für die dargestellte Sequenz.

Nun kann man noch die Positionen der Sechser ändern. Dazu wählt man drei Positionen von acht.

Die Lösung lautet $\binom{8}{3} \cdot 5^5$.