Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung

Studium

Studiere den nachfolgenden Text genau. Damit solltest du die Herleitung der letzten Kombinatorik-Formel begreifen.

Vorbereitende Aufgaben:

a) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 *verschiedenfarbige* Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln *in verschiedene Kisten* gelegt werden sollen?

Die Lösung kennst du aus dem Kapitel 1.2. Die Anzahl Verteilungen beträgt $\frac{9!}{3!}$

(Übrigens ist das eine geordnete Stichprobe ohne Wiederholung.)

b) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 *identische* Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln *in verschiedene Kisten* gelegt werden sollen?

Die Lösung dazu kennst du aus dem Kapitel 1.3. Anzahl Verteilungen: $\frac{9!}{3! \cdot 6!} = \binom{9}{6}$

Zur Erinnerung: Aus 6! Anordnungen bei unterscheidbaren Kugeln wird jeweils eine Anordnung bei identischen Kugeln. Daher ist die Anzahl von Aufgabe a) durch 6! zu dividieren, um die Anzahl von Aufgabe b) zu erhalten.
(Das ist im übrigen eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung.)

c) Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 *verschiedenfarbige* Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln *beliebig* verteilt werden dürfen?
Die Lösung kennst du aus dem Kapitel 1.2. Die Anzahl Verteilungen beträgt 9^6.
(Hier erscheint die Formel für eine geordnete Stichprobe mit Wiederholung.)

Aufgabe:

Man hat 9 Kisten in einer Reihe und 6 *identische* Kugeln. Auf wie viele Arten kann man die Kugeln auf die Kisten verteilen, wenn die Kugeln *beliebig* verteilt werden dürfen?

Das oben beschriebene Vorgehen (nämlich die Anzahl Verteilungen bei unterscheidbaren Kugeln durch 6! zu dividieren) funktioniert jetzt (d.h. bei beliebiger Verteilung) nicht. Die Antwort ist also *nicht* $\frac{9^6}{6!}$, wie man vielleicht zuerst vermutet.

Dafür gibt es zwei Begründungen: Erstens (rechnerisch) $\frac{9^6}{6!}$ ergibt ausgerechnet 738.11 und für eine *Anzahl* Möglichkeiten oder Verteilungen muss das Ergebnis eine natürliche Zahl sein. Nachkommastellen sind in der Kombinatorik generell verboten.

Zweitens (anschaulich): Wenn sich die 6 Kugeln alle in einer einzigen Kiste (z.B. in der Kiste ganz links) befinden, dann ist das auch bei unterscheidbaren Kugeln nur eine einzige Möglichkeit (und eine einzige Möglichkeit kann man nicht durch 6! dividieren).

Für die Berechnung der Anzahl ungeordneter Stichproben mit Wiederholung müssen wir folglich anders vorgehen.

Gegeben sind also n = 9 Kisten und k = 6 Kugeln. Ein Beispiel einer Verteilung zeigt die Figur rechts.

Wir wollen nun die möglichen Verteilungen beschreiben. Die Kugeln stellen wir als Kreise dar und die Kisten trennen wir durch Striche. (siehe die untere Figur)

Bei n = 9 Kisten hat man aber nur n – 1 = 8 Striche zu setzen, weil durch 8 Striche 9 Plätze (inkl. zwei links und rechts aussen für die äussersten Kisten) festgelegt sind.

Wir erhalten also für die in den Figuren dargestellte Verteilung folgende Sequenz aus 8 Strichen und 6 Kreisen: ○||○○|||○|||○○ . Dabei können wir uns die Kisten wegdenken.

Entscheidend ist nun, dass jeder Verteilung der Kugeln auf die Kisten genau einer Sequenz aus Strichlein und Kreisen entspricht (und umgekehrt natürlich auch).

Der Verteilung "je 2 Kugeln in die 3., 4. und 7. Kiste (von links)" entspricht somit die Sequenz ||○○|○○|||○○|| .

Ist der Übergang von der Verteilung zur Sequenz klar? Kontrolliere, ob du begriffen hast:

a) Welcher Sequenz entspricht die folgende Verteilung: 5 Kugeln in der 2. Kiste und eine Kugel in der 6. Kiste (von links)
b) Welcher Verteilung entspricht die Sequenz |||○○○|||||○○○ ?

(*zuerst lösen, dann weiterlesen!*)

....

....

....

....

Lösung:
a) |○○○○○||||○||| b) Je drei Kugeln in der 4. resp. 9. Kiste.

Jeder Verteilung der Kugeln entspricht somit eine Sequenz aus n – 1 = 8 Strichen und k = 6 Kreisen, was eine Sequenz von n + k – 1 = 14 Zeichen ergibt. Die Anzahl Möglichkeiten für solche Sequenzen beträgt $\binom{14}{6}$. (Das weißt du schon aus dem Kapitel 1.3.)

Allgemein hat man n + k – 1 Zeichen in der Sequenz, wovon k Kreise.
Somit gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ Sequenzen und damit gleich viele Verteilungen.

Damit sollte dir klar sein, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ ungeordnete Stichproben mit Wiederholung gibt