Binomialkoeffizienten

Übung online-Lehrgang

Dieses Blatt ist in einem gewissen Sinne Zusatzmaterial. Es geht um Regeln, welche für Binomialkoeffizienten gelten. Die anderen Übungen des Lehrgangs kann man alle auch ohne Kenntnisse dieses Blattes lösen. Aber die Regeln auf diesem Blatt helfen, das Verständnis für Binomialkoeffizienten zu fördern.

1. Aufgabe:

a) Wenn man $\binom{22}{1}$ berechnet, so erhält man als Ergebnis 22.

b) Die Verallgemeinerung lautet $\binom{n}{1} = n$. Begründe dieses Resultat.

Didaktische Anmerkung: Die Lösungen finden sich alle auf der zweiten Seite dieses Dokumentes. Es ist daher nützlich, die Aufgaben (mindestens 1 – 5) durchzuarbeiten und erst nachher in den Lösungen nachzuschauen.

2. Aufgabe:

Berechne $\binom{22}{22}$, verallgemeinere und begründe.

3. Aufgabe:

Berechne $\binom{22}{23}$ sowie $\binom{22}{25}$, verallgemeinere und begründe.

4. Aufgabe:

Berechne $\binom{22}{0}$, verallgemeinere und begründe.

5. Aufgabe:

Prüfe $\binom{22}{5} = \binom{22}{17}$, verallgemeinere und begründe.

6. Aufgabe:

Prüfe $\binom{22}{13} + \binom{22}{14} = \binom{23}{14}$ und verallgemeinere. Die Begründung ist schwierig.

Lösungen

1. Aufgabe:

$\binom{n}{1} = n$

Von n Elementen muss man genau eines auswählen. Dafür gibt es n Möglichkeiten, denn man kann jedes Element einzeln (allein) wählen – in die Hand nehmen – und somit alle anderen ausser Betracht lassen.

2. Aufgabe:

$\binom{22}{22} = 1$. Allgemein ist $\binom{n}{n} = 1$.

Wenn man von n Elementen alle wählen soll, dann ist dies die einzige Möglichkeit. Man nimmt alle Elemente in die Hand. Natürlich kann man auch in die Definition einsetzen.

3. Aufgabe:

$\binom{22}{23} = \binom{22}{25} = 0$. Allgemein ist $\binom{n}{k} = 0$, wenn k > n.

Von n Elementen kann man nicht mehr auswählen als man zur Verfügung hat.

4. Aufgabe:

$\binom{22}{0} = 1$. Allgemein ist $\binom{n}{0} = 1$.

Wenn man von n Elementen keines auswählen muss, dann ist das eine Möglichkeit. Das Ergebnis ist also 1 und nicht 0, auch wenn man kein Element in die Hand nimmt.
Als Erläuterung dient vielleicht die Idee, dass man alle Elemente liegen lässt.

5. Aufgabe:

$\binom{22}{5} = \binom{22}{17}$, Allgemein ist $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Von n Elementen wählt man k aus. Die restlichen n – k Elemente lässt man liegen. Ob man nun die k Elemente betrachtet, die man auf die Hand nimmt oder die anderen, welche man liegen lässt, spielt aus mathematischer Sicht keine Rolle.

(Aufgabe 6 ist auf der nächsten Seite. Wem bis hier alles klar war, kann sich allenfalls nur die nächste Seite ausdrucken.)

6. Aufgabe:

$\binom{22}{13}+\binom{22}{14}=\binom{23}{14}$. Die allgemeine Formel kann man auf verschiedene Arten schreiben. Üblich sind etwa folgende Versionen: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ oder $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

Man kann die Definition der Binomialkoeffizienten anwenden und viel rechnen. Oder man überlegt zuerst. Dann verläuft die Begründung anhand der konkreten Zahlen etwa so:

- Links vom Gleichheitszeichen hat man vorerst nur 22 Elemente.
- Rechts vom Gleichheitszeichen hat man 23 Elemente, von denen man 14 auswählt. Dafür gibt es $\binom{23}{14}$ Möglichkeiten (A)
- Betrachte nun das 23. und letzte Element gesondert.
- Wenn man dieses *nicht* in die Auswahl nimmt, dann muss man von den vorherigen 22 Elementen 14 auswählen. Dafür gibt es $\binom{22}{14}$ Möglichkeiten. (B)
- Wenn man aber das 23. Element in die Auswahl mit hineinnimmt, dann muss man von den anderen Elementen nur 13 wählen. Dafür hat man $\binom{22}{13}$ Möglichkeiten. (C)
- Nun schliessen sich die Möglichkeiten (B) und (C) gegenseitig aus, sind also disjunkt, denn entweder hat man das 23. Element gewählt oder eben nicht.
- Zusammen geben (B) und (C) genau die Anzahl Möglichkeiten, aus allen 23 Elementen deren 14 auszuwählen, also (A). Das war's.

Wenn man die Begründung allgemein führt, dann wählt man in der oben links angefügten allgemeinen Formel das n + 1 – te Element gesondert, in der Version rechts wählt man das n – te Element gesondert. Im übrigen verläuft die Begründung aber genau gleich wie für die konkreten Zahlen.