Von der Binomial- zur Normalverteilung

Ein Text zum Studium

In diesem Text wird folgende Aufgabe besprochen:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man in 10000 Würfen einer (symmetrischen) Münze mindestens 5040-mal "Kopf"?

---

1) Vorbereitung

Die Kenntnis folgender Aufgaben und Theorieteile wird vorausgesetzt:

a) Eine Münze wird 16 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 12 "Kopf"?
   Die Lösung erhält man mit der Binomialverteilung: $\sum_{x=12}^{16}\binom{16}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{16-x} = 0.0384$

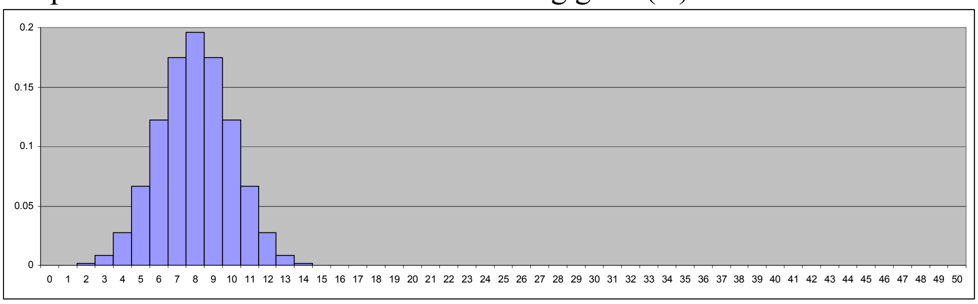
b) Für jede Binomialverteilung gilt $E(X) = np$, $V(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

c) Die Binomialverteilung kann angewendet werden, wenn man n identische, unabhängige Versuchsstufen hat und es stets um "Treffer" oder "Nicht-Treffer" geht. (Beispielsweise "Kopf" oder "Zahl" beim Münzwurf, "Sechser" oder "Nicht-Sechser" beim Würfeln, "Herz" oder "Nicht-Herz" beim Ziehen einer Karte mit Zurücklegen.)

2) Diagramme

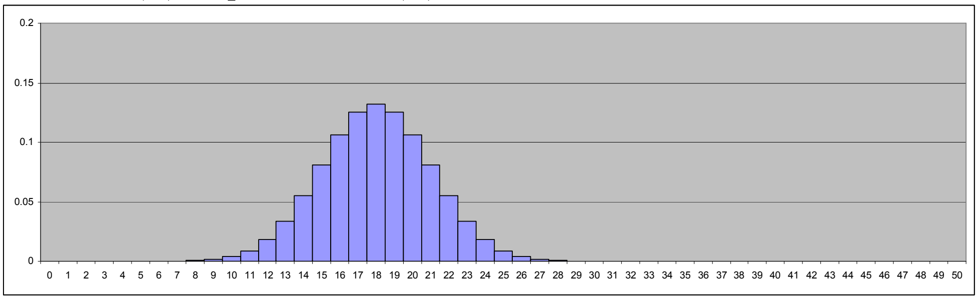
a) Wir betrachten unsere Musteraufgabe:
   Eine Münze wird $n = 10000$ mal geworfen und man betrachtet die Anzahl X der "Kopf"-Würfe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 5040 "Kopf"?
   Mit Binomialverteilung kommt man hier nicht mehr durch. Selbst leistungsfähige Rechner haben zu lange, denn man müsste von $x = 5040$ bis $x = 10000$ durchsummieren.
   Wir wissen aber: es gilt $E(X) = 5000$, $V(X) = 2500$ und somit $\sigma(X) = 50$.

b) Wir gehen nun Schritt für Schritt an unsere Aufgabe heran. Dazu betrachten wir einige Diagramme zur Binomialverteilung, indem wir in einem Diagramm die Wahrscheinlichkeiten einzeln in y-Richtung abtragen. Ein hoher Balken bedeutet eine hohe Wahrscheinlichkeit, wenn die Balken klein werden, dann ist auch die Wahrscheinlichkeit klein.
   Für das erste Diagramm setzen wir $n = 16$ und $p = ½$. Das erste Diagramm passt also zur Aufgabe eines 16-fachen Münzwurfes. Man erwartet (logischerweise) $E(X) = np = 8$ "Kopf"-Würfe. Für die Standardabweichung gilt $\sigma(X) = 2$.



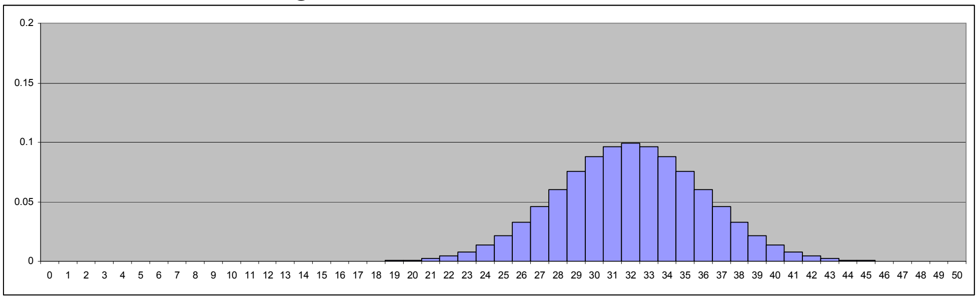
   Man sieht beispielsweise, dass eine Abweichung um 6 Würfe vom Mittelwert (mit anderen Worten: 14 "Kopf"-Würfe) sehr unwahrscheinlich wird. Ausserdem sieht man, dass der Bereich, in welchem die Abweichung vom Mittelwert maximal einmal σ beträgt, relativ schmal ist, nämlich nur von $x = 6$ bis $x = 10$.

Untenstehend sehen wir nun das Diagramm für n = 36. (An der "Treffer-Wahrscheinlichkeit" p = ½ ändern wir für die ganze Betrachtung nichts.).
Dann ist E(X) = np = 18 und σ(X) = 3.



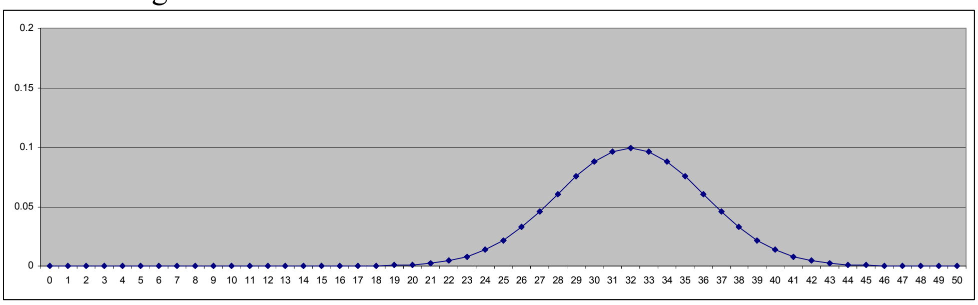
Wir erkennen, dass sich die Grafik nach rechts verschoben hat. Das ist wegen des grösseren Erwartungswerts klar. Ferner wird das Diagramm wegen der grösseren Standardabweichung breiter. Der Bereich, in welchem die Abweichung vom Mittelwert maximal einmal σ beträgt, umfasst jetzt die Werte zwischen x = 15 und x = 21. Und schliesslich ist das Diagramm weniger hoch. Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten – d.h. die Summe aller Werte der senkrechten Balken – gleich 1 bleibt, müsste auch das klar sein.

Wenn wir nun 64 Münzwürfe durchführen, dann wird E(X) = 32 und σ(X) = 4.
Das untenstehende Diagramm sollte den Sachverhalt illustrieren.



Das Diagramm ist nochmals nach rechts gerutscht (weil E(X) grösser wurde), ist breiter geworden (weil σ(X) grösser wurde) und ist (wegen der Summe 1) flacher geworden. Der Bereich, in welchem die Abweichung vom Mittelwert maximal einmal σ beträgt, umfasst jetzt die Werte zwischen x = 28 und x = 36.

c) Im nächsten Kapitel werden wir zu solchen Diagrammen eine gute Näherungskurve herleiten. Wenn man die Mittelpunkte der Oberkanten aller Balken des Diagramms verbindet, so kann man für das letzte Diagramm die Kurve bereits erahnen. Das Diagramm hat dann folgendes Aussehen:

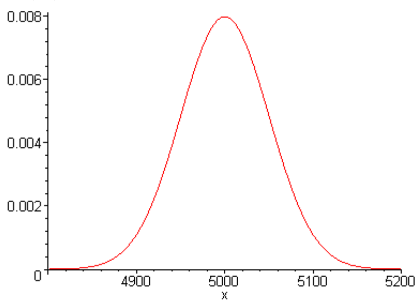


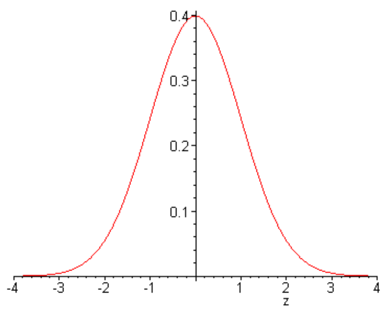
d) Für spätere Berechnungen ist nun die folgende Überlegung wichtig: Wenn wir eine gewisse Anzahl Treffer betrachten, dann geht es um die *Abweichung* vom Mittelwert. Aber nicht nur. Es geht insbesondere darum, in welchem Verhältnis diese Abweichung zur Standardabweichung σ steht. Anders ausgedrückt stellt sich die Frage, mit welchem Faktor man σ multiplizieren muss, um die betrachtete Abweichung zu erhalten. Eine Abweichung von 6 "Kopf"-Würfen bedeutet im ersten Diagramm eine Abweichung um $3\cdot\sigma$ und ist fast unmöglich. Im zweiten Diagramm ist das eine Abweichung um $2\cdot\sigma$ und wahrscheinlicher, im dritten Diagramm hat man damit eine Abweichung um $1.5\cdot\sigma$ und das ist relativ normal. Und wenn ich bei 1000 Würfen einer Münze 506 "Kopf" erhalte (statt der zu erwartenden 500 "Kopf"), dann wird kaum jemand an diesem Resultat etwas deuten wollen.
Weil es von entscheidender Wichtigkeit ist, nochmals: Uns interessiert von einem (erhaltenen) Ergebnis der *Faktor*, mit dem man die *Standardabweichung multiplizieren* muss, um die *Abweichung* des Ergebnisses *vom Mittelwert* zu erhalten.

3) Die Gauss'sche Glockenkurve

a) Es war eine der grossen mathematischen Entdeckungen von C. F. Gauss (1777 – 1855), dass man eigentlich alle so entstehenden Kurven durch eine einzige annähern kann. Damit diese Näherung nicht mit grossen Rundungseffekten belastet wird, muss die Versuchsanzahl n relativ gross sein und die Trefferwahrscheinlichkeit p darf nicht allzu klein (und auch nicht allzu gross) sein. Siehe dazu die Bemerkung weiter unten.

b) Das Diagramm links zeigt die Verteilungskurve für unser Einstiegsbeispiel. Wir erinnern uns: $n = 10000$ und $p = ½$. In diesem Fall ist $E(X) = 5000$ und $\sigma(X) = 50$. Von $x \geq 5000$ bis $x < 5100$ müsste man sich jetzt 100 kleine, schmale Balken vorstellen.
Das Diagramm rechts zeigt die Kurve der standardisierten Normalverteilung. Hier gilt $E(Z) = 0$ und $\sigma(Z) = 1$.





Nun stellt sich noch die Frage, wie man von einem bestimmten x-Wert (im Diagramm links) zum zugehörigen z-Wert (im Diagramm rechts) kommt. Dazu betrachten wir unser Beispiel: Der Wert $x = 5040$ liegt um 40 über dem Erwartungswert von 5000. Diese 40 ist genau das 0.8-fache der Standardabweichung (denn die beträgt 50). Der zugehörige, gesuchte z-Wert ist somit $z = 0.8$. Man kann die beiden senkrechten Strecken bei $x = 5040$ sowie bei $z = 0.8$ einzeichnen und sieht, dass sich diese Strecken gut entsprechen.

In der Einstiegsaufgabe war die Wahrscheinlichkeit für mindestens 5040 "Kopf"-Würfe gesucht. Wir müssten also die Wahrscheinlichkeiten von $x = 5040$ bis $x = 10000$ aufsummieren. Nun ist der Übergang zur standardisierten Normalverteilung entscheidend: wir suchen folglich die Fläche unter der Kurve der standardisierten Normalverteilung von $z = 0.8$ bis $z = \infty$. Das scheint auf den ersten Blick keine Erleichterung zu werden. Wichtig ist aber der Gedanke, dass wir schliesslich für die Berechnungen nur noch eine einzige Kurve benötigen.

c) An dieser Stelle einige theoretische Zwischenbemerkungen:
Die Funktionsgleichung der Kurve, die im Diagramm rechts dargestellt ist, lautet
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (Die Begründung dafür lassen wir hier weg.)
Da wir nun Flächen unterhalb dieser Kurve berechnen wollen, müssen wir integrieren. Da stellt sich das nächste Problem, denn die Kurve $\varphi(x)$ hat keine (elementar auszudrückende) Stammfunktion. Im Zeitalter von Computern und leistungsfähigen Taschenrechnern ist das nicht mehr so ein Problem, ausserdem gibt es eine Tabelle, in welcher die Werte dieses bestimmten Integrals aufgeführt sind.

Die Werte von $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\,dx$ findet man in jeder besseren Formelsammlung.

Hier ein kleiner Ausschnitt: Lesebeispiel: $\Phi(1.3) = 0.9032$.

	0	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
0	0.5000	0.5398	0.5793	0.6179	0.6554	0.6915	0.7257	0.7580	0.7881	0.8159
1	0.8413	0.8643	0.8849	0.9032	0.9192	0.9332	0.9452	0.9554	0.9641	0.9713
2	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981

$\Phi(z)$ ist immer das Integral von "minus unendlich" bis zur oberen Grenze z und somit die Fläche unterhalb der Normalverteilungskurve links von der senkrechten Geraden $x = z$.

d) Nun sind wir in der Lage, die Einstiegsaufgabe fertig zu lösen:
Aus der Tabelle lesen wir ab: $\Phi(0.8) = 0.7881$.
Diese 78.81% sind die Fläche von "minus unendlich" bis zum Wert $z = 0.8$. Das ist dann die Wahrscheinlichkeit für 5040 oder weniger "Kopf"-Würfe. Gesucht war aber die Wahrscheinlichkeit für mindestens 5040 "Kopf", also das Gegenteil.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit 21.19%.

4. Zusatzbemerkungen

a) Es gilt (ohne Beweis), dass eine binomialverteilte Zufallsgrösse mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{npq}$ durch die Normalverteilung approximiert werden kann, wenn $npq > 9$ ist.
In unserem Beispiel war $\sigma = 50$, aber eigentlich würde schon $\sigma > 3$ genügen.

b) Wenn wir mit der Normalverteilung rechnen, müssen wir uns nicht mehr darum kümmern, ob in der Aufgabenstellung von mindestens 5040 oder von mehr als 5040 "Kopf"-Würfen die Rede ist, da die Wahrscheinlichkeit für genau 5040 "Kopf" extrem klein ist. Wir rechnen mit den vorgegebenen Werten.

c) $\Phi(z)$ stellt die Fläche bis zur rechten Grenze z dar. z ist also stets eine Integrationsgrenze und $\Phi(z)$ rechnet immer die Fläche links davon, d.h. "nach unten".

d) Wie kommt man aus den gegebenen Daten auf den Wert von z?
Wir hatten 5040 "Kopf" bei $E(X) = \mu = 5000$ und $\sigma = 50$. Dann ist $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.
Die Formel illustriert, was weiter oben steht: Man betrachtet die Differenz zum Mittelwert und fragt sich, um welchen Faktor von σ es sich handelt. Die entscheidende Gleichung lautet also $z \cdot \sigma = x - \mu$. Diese lösen wir nach z auf und erhalten das Gesuchte.