



## 2. Abweichung zum Mittelwert

Für spätere Berechnungen ist nun die folgende Überlegung wichtig: Wenn wir eine gewisse Anzahl Treffer betrachten, dann geht es um die Abweichung vom Mittelwert. (Das kennen wir bereits vom Hypothesentest.)

Nun geht es aber auch noch darum, in welchem Verhältnis diese Abweichung zur Standardabweichung  $\sigma$  steht. Anders ausgedrückt stellt sich die Frage, mit welchem Faktor man  $\sigma$  multiplizieren muss, um die betrachtete Abweichung zu erhalten. Beispielhaft betrachten wir eine Abweichung von 6 **Kopf**-Würfeln zum Mittelwert. Es sollen also 6 **Kopf**-Würfe mehr als erwartet vorgekommen sein.

- Eine Abweichung von 6 **Kopf**-Würfeln bedeutet im ersten Diagramm eine Abweichung um  $3 \cdot \sigma$  und ist nahezu unmöglich.
- Im zweiten Diagramm ist das eine Abweichung um  $2 \cdot \sigma$  und somit deutlich wahrscheinlicher.
- Im dritten Diagramm ist das eine Abweichung um  $1.5 \cdot \sigma$  und relativ normal.
- Und wenn man bei 1000 Würfeln einer Münze 506 **Kopf** erhält (statt der zu erwartenden 500), dann ist das völlig normal.

Folglich: Uns interessiert von einem (erhaltenen) Ergebnis der Faktor, mit dem man die Standardabweichung multiplizieren muss, um die Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert zu erhalten.

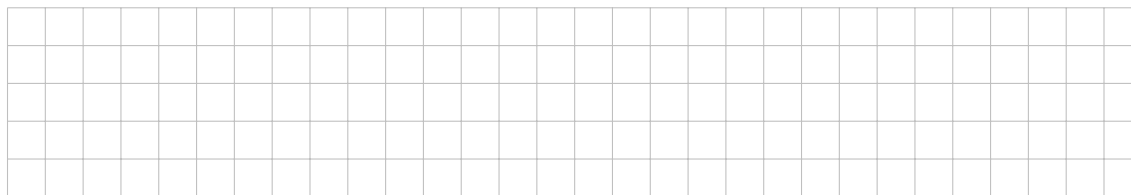
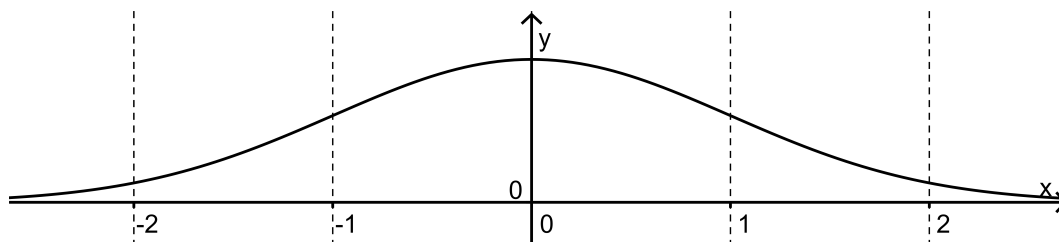


## 4.2. Die standardisierte Normalverteilung

### 1. Eine Funktionskurve

Theoretisch müsste man für jeden Wert von  $n$  die im vorigen Kapitel betrachteten Werte ermitteln und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnen. Wenn man jedoch die Diagramme betrachtet, sieht man, dass sie grob gesehen die gleiche Gestalt haben.

Es war eine der grossen mathematischen Entdeckungen von C. F. Gauss (1777 – 1855), dass man eigentlich alle so entstehenden Kurven durch eine einzige annähern kann. Damit diese Näherung nicht mit grossen Rundungseffekten belastet wird, muss die Versuchsanzahl  $n$  relativ gross sein und die Trefferwahrscheinlichkeit  $p$  darf nicht allzu klein (und auch nicht allzu gross) sein.



Die Gleichung dieser Gauss'schen Glockenkurve lautet  $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Da wir nun Flächen unterhalb dieser Kurve berechnen wollen, müssen wir integrieren. Da stellt sich das nächste Problem, denn die Funktion  $\varphi(x)$  hat keine (elementar auszudrückende) Stammfunktion. Im Zeitalter von Computern und leistungsfähigen Taschenrechnern ist das nicht mehr so ein Problem, ausserdem gibt es eine Tabelle, in welcher die Werte dieses bestimmten Integrals aufgeführt sind.

Werte für  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx$  findet man in jeder Formelsammlung.



2. **Arbeiten mit der Tabelle**

- a)  $\Phi(0.34) = \dots\dots\dots$
- b)  $\Phi(1.34) = \dots\dots\dots$
- c)  $\Phi(0.03) = \dots\dots\dots$
- d)  $\Phi(-0.86) = \dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$
- e)  $P(0.3 < Z < 1.25) = \dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$
- f)  $P(0.3 \leq Z \leq 1.25) = \dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$
- g)  $P(Z \geq 1.645) = \dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$
- h) Wie gross ist  $z$ , wenn  $\Phi(z) = 0.86$ ?  $\dots\dots\dots$
- i) Wie gross ist  $z$ , wenn  $\Phi(z) = 0.05$ ?  $\dots\dots\dots$

3. **Annäherung von Binomialverteilung durch Normalverteilung**

Es gilt, dass eine binomialverteilte Zufallsgröße mit  $\mu = n \cdot p$  und  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$  durch die Normalverteilung approximiert werden kann, wenn  $n \cdot p \cdot q > 9$  ist.  
 (Ohne Beweis)

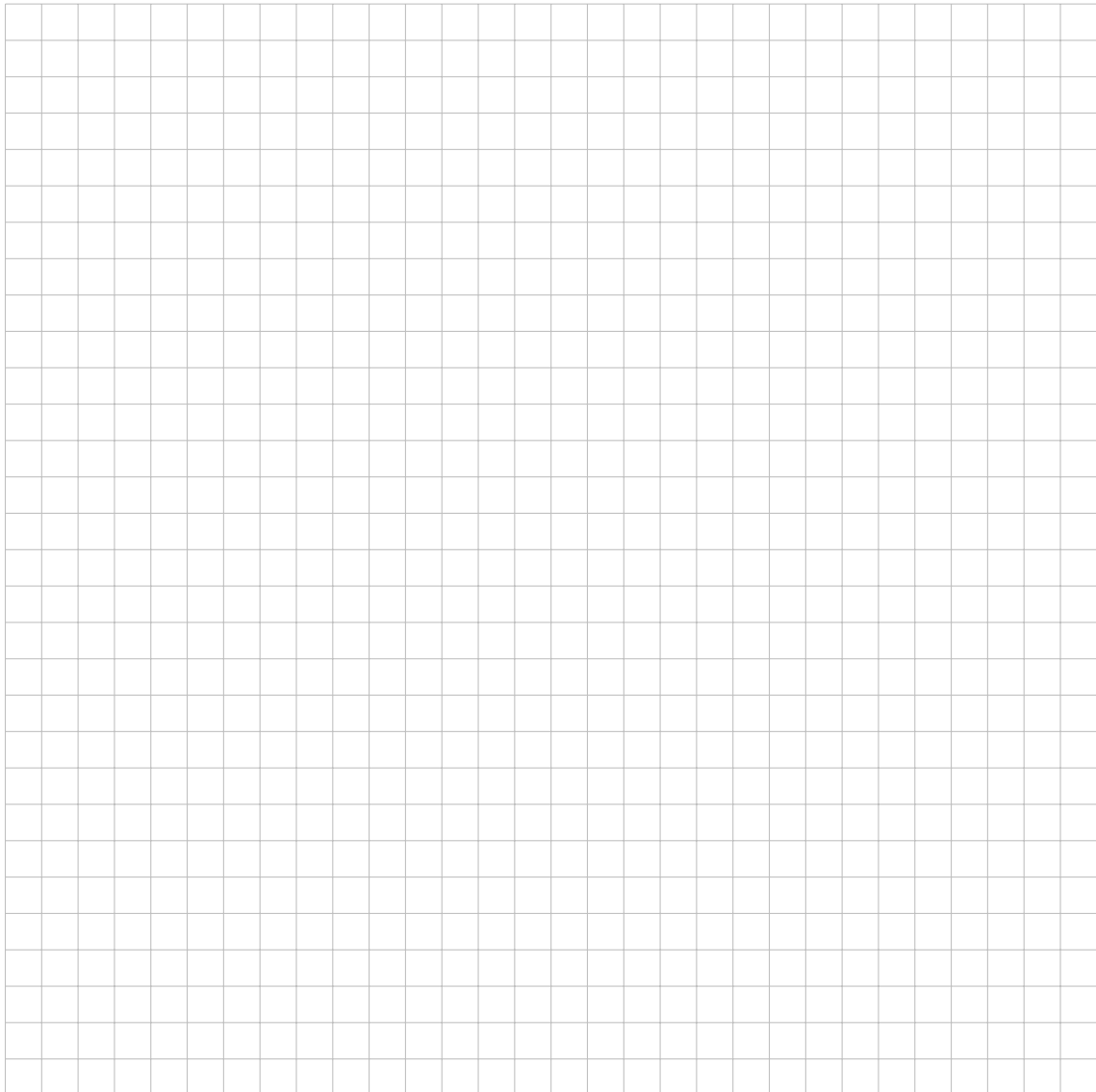
4. **Musterbeispiel, Grundsituation**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man in 10000 Würfeln einer (symmetrischen) Münze höchstens 5040-mal **Kopf**?



5. **Übungen**

- a) Eine Münze wird 800 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man höchstens 410 **Zahl**-Würfe?
- b) Eine Münze wird 800 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 425 **Kopf**-Würfe?
- c) Ein Würfel wird 1800 Mal geworfen.  $X$  bezeichne die Anzahl geworfener Dreier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für  $280 < X < 310$ ?

**Für Schnellrechner**

Ein Glücksrad zeigt ★ mit Wahrscheinlichkeit  $p = 0.4$ .  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man in 500 Versuchen zwischen 180 und 190 ★?

### 4.3. Angewandte Aufgaben

#### 1. Hypothesentest

- a) Ein Würfel wird 1000 Mal geworfen. Dabei erschienen nur 140 Sechser. Ist dieser Würfel als asymmetrisch anzusehen?
- b) Ab wie wenig Sechsern wird man den Würfel als asymmetrisch ansehen?



#### 2. Symmetrischer Bereich

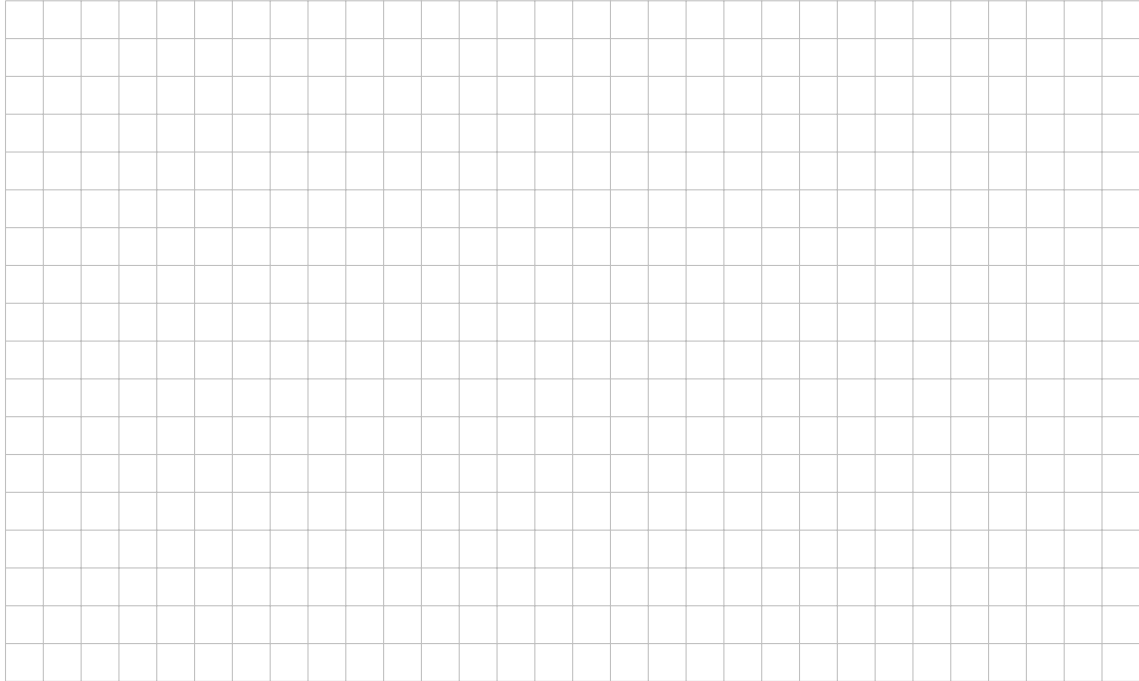
Eine Münze wird 1000 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl **Kopf**-Wurfe um weniger als 20 vom Erwartungswert abweicht?



**3. Majorzwahl**

In einem Dorf gehen 150 Personen zur Urne. Es sei vorgegeben, dass jede Person zufällig mit Wahrscheinlichkeit 51 % für den Kandidaten A (und mit Wahrscheinlichkeit 49 % für B) stimmt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird trotzdem B gewählt?

**Zusatz:**

Man löse dieselbe Aufgabe auch für eine Stadt mit 15'000 Wählenden.



#### 4. Die unentschlossene Mehrheit

Wie eine kleine Gruppe eine unentschlossene Mehrheit beeinflussen kann: In einem Dorf gehen 580 Personen zur Urne. 50 Personen stimmen für den Kandidaten A, die restlichen Dorfbewohnerinnen und -bewohner entscheiden sich durch Münzwurf ( $p = \frac{1}{2}$ ) für A oder B.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird A gewählt?



#### 5. Das Overbooking-Problem

Ein Flugzeug hat 192 Plätze. Wie viele Reservationen darf eine Fluggesellschaft entgegen nehmen, wenn erfahrungsgemäss 20% der Reservationen wieder annulliert werden? Die Fluggesellschaft ist bereit, mit der Wahrscheinlichkeit von 2.28 % in Verlegenheit zu geraten (weil mehr Leute erscheinen als Plätze zur Verfügung stehen).



#### Lernkontrolle

Wie oft muss man eine Münze werfen, wenn man mit 90%-iger Sicherheit mindestens 100 **Kopf**-Würfe erzielen will?