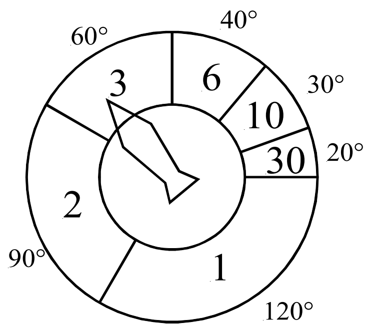
2. Zufallsgrössen

1) Beispiel

Betrachte das nebenstehende Glücksrad.
Die markierte Zahl stellt den entsprechenden Gewinn dar. Welcher durchschnittliche Gewinn pro Versuch ist bei diesem Glücksrad zu erwarten?
Schätze zunächst, bevor du rechnest!



X						
p						

Man erhält E(X) =

2) Theoretische Bemerkungen

Eine Zufallsgrösse ist grundsätzlich eine Funktion, die jedem Ergebnis ω eines Zufallsversuchs eine (reelle) Zahl zuordnet. Diese Zahl kann man als Gewinn deuten.

Man hat die Verteilungstabelle	X:	x_1	x_2	.....	x_n
mitsamt den Wahrscheinlichkeiten	p:	$p(x_1)$	$p(x_2)$	.....	$p(x_n)$

Dann ist E(X) der Erwartungswert der Zufallsgrösse X. E(X) = ...

und die Varianz der Zufallsgrösse X ist V(X) = ...

Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ gilt $\sigma(X)$ = ...

3) Beispiel

Ein Behälter enthält zwei rote und fünf weisse Kugeln. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Falls es zwei weisse und eine rote sind, gewinnt man 2.–, sonst verliert man 3.– .

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen?
b) Lohnt sich das Spiel langfristig für den Veranstalter oder für den Spieler?

4) Baumdiagramm, faires Spiel

Ein (üblicher, symmetrischer) Würfel wird geworfen. Erscheint eine "1" im ersten Wurf, dann gewinnt man 3.– und das Spiel ist zu Ende. Sonst wirft man weiter. Erscheint eine "2" im zweiten Wurf, dann gewinnt man 4.– und das Spiel ist zu Ende. Sonst wirft man weiter. Erscheint eine "3" im dritten Wurf, dann gewinnt man 6.–, andernfalls gewinnt man nichts. Nach drei Würfen ist das Spiel auf alle Fälle beendet.
Wie viel muss als Einsatz verlangt werden, damit dieses Spiel fair ist?

5) Faires Spiel zum Zweiten

In einem Behälter befinden sich 5 schwarze und zwei weisse Kugeln. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Zieht man mindestens eine weisse Kugel, so gewinnt man x Fr, andernfalls verliert man 7.–. Bestimme x so, dass das Spiel fair ist.

6) Anzahl Ziehungen, unterschiedlich lange Pfade

In einem Behälter hat man 3 weisse und 2 rote Kugeln. Man zieht einzeln und ohne Zurücklegen so lange, bis man eine rote Kugel gezogen hat. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl benötigter Ziehungen. Berechne E(X) und V(X).

7) Wie lange dauert ein Tennis-Match? (best of five)

Eine Münze wird so lange geworfen, bis eine Seite (egal welche) zum dritten Mal erschienen ist. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl benötigter Würfe. E(X) = ?

8) Ziehen mit Zurücklegen
Ein Würfel wird drei Mal geworfen. Es sei X die Anzahl geworfener Sechser. Bestimme die Verteilungstabelle der Zufallsgrösse X sowie E(X), V(X) und σ(X).

9) Ziehen ohne Zurücklegen
In einem Behälter befinden sich 2 weisse und 3 rote Kugeln. Man zieht 3 Kugeln ohne Zurücklegen. X bezeichne die Anzahl gezogener weisser Kugeln. Bestimme E(X).

10) Unbekannte Wahrscheinlichkeit
Ein Glücksrad zeige "doppelt" mit Wahrscheinlichkeit p und "halb" mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.
Zu Beginn habe man ein Vermögen von 4.–. Das Rad wird zweimal gedreht. Jedesmal wenn "doppelt" bzw. "halb" erscheint, wird das Vermögen verdoppelt bzw. halbiert. Bestimme p so, dass das zu durchschnittliche zu erwartende Vermögen nach den beiden Drehungen gerade 4.– beträgt.

11) Ein Vergleich
In einem Behälter befinden sich 4 Kugeln. Eine ist mit "1" markiert, die übrigen mit "0".
a) Man zieht *eine* Kugel. Die Zufallsgrösse X bezeichne die gezogene Zahl.
b) Man zieht *zweimal mit* Zurücklegen. Y bezeichne die Summe der gezogenen Zahlen.
c) Man zieht *zweimal ohne* Zurücklegen. Z bezeichne die Summe der gezogenen Zahlen.
Vergleiche die Erwartungswerte und die Varianzen von X mit Y resp. Z.

Wir notieren:

....

....

....

....

12) Beispiel
Die 12 Seiten eines Dodekaeders sind mit den Zahlen 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5 beschriftet. Das Dodekaeder wird 4 Mal geworfen. Die Zufallsgrösse X bezeichnet die Summe der vier geworfenen Zahlen. Berechne E(X) und V(X).

---

13) Lernkontrolle
Eine Aufgabe aus einer früheren Prüfung:
In einem Behälter hat man zwei weisse und n rote Kugeln. Man zieht Kugeln einzeln ohne Zurücklegen und so lange, bis man eine rote Kugel gezogen hat. (Wenn man eine rote Kugel gezogen hat, ist das Spiel sofort zu Ende.)
Erscheint eine rote Kugel bei der ersten Ziehung, dann verliert man 3 Fr.; erscheint eine rote Kugel bei der zweiten Ziehung, dann gewinnt man 20 Fr.; erscheint eine rote Kugel bei der dritten Ziehung, dann verliert man 7 Fr.
a) Setze n = 8 und bestimme den durchschnittlichen zu erwartenden Gewinn.
b) Für welche Anzahl n ist das Spiel fair?