

2. Zufallsgrößen

Ergebnisse

1) Glücksrad

$$E(X) = 1, V(X) = 1, \sigma(X) = 1.$$

2) Kugeln ziehen

$E(X) = -2.321$, d.h. im Mittel verliert man mehr als 2.–.

[Die Wahrscheinlichkeit für 3 weisse Kugeln beträgt $5/28$.]

3) Holzwürfel

$$E(X) = 2, V(X) = 2/3, \sigma(X) = 0.816.$$

[Man hat 8 Würfelchen (in den Ecken) mit drei blauen Seitenflächen, 12 Würfelchen mit zwei, 6 mit einer und 1 Würfelchen ohne blaue Seitenfläche.]

$$\text{Zusatz: } E(X) = \frac{6}{n}$$

[Es gibt 8 Würfelchen mit 3 blauen Flächen (in den Würfecken), $12 \cdot (n-2)$ mit 2 blauen Flächen (auf den Würfelkanten, auf jeder Kante $n-2$ Würfelchen), $6 \cdot (n-2)^2$ mit einer blauen Fläche (auf den Würfelseitenflächen) und $(n-2)^3$ ohne blaue Fläche (im Innern des Würfels). $p(3) = 8/n^3$, $p(2) = 12 \cdot (n-2)/n^3$, $p(1) = 6 \cdot (n-2)^2/n^3$, $p(0) = (n-2)^3/n^3$

Dann ist $E(X) = 6/n$.

Für $n = 1$ hat man einen blau gefärbten Würfel und es ist $E = 6$.

Für $n = 2$ hat man 8 Würfelchen mit je genau 3 blauen Seiten, also $E = 3$.]

4) Ziehen ohne Zurücklegen

a)

X	0	1	2	3
p	$\frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{12}{3}}$

b) $E(X) = 7/4, V(X) = 0.5966, \sigma(X) = 0.7724$

5) Ein Spiel

$$E(X) = 10.-.$$

[Es gibt zwei Gewinnwege: entweder legt man eine weisse oder eine schwarze aus der ersten in die zweite Kiste. Von der zweiten in die dritte Kiste muss man eine schwarze herüberlegen und diese schwarze dann aus der dritten Kiste ziehen.]

6) Jasskarten

$$3.472$$

[Vorsicht: Die 9.– gewinnt man, wenn man ein anderes As zieht, die 3.–, wenn man eine Herzkarte zieht (aber nicht das Herz-As).]

7) Fairer Gaukler

$$x = 8$$

[Für den Gewinn G hat man drei Möglichkeiten: 15, 22, $-x$. Setze $E(G) = 0$.]

8) Faires Spiel

$$x_1 = -0.792, x_2 = -4.208$$

[Die Verteilungstabelle sieht so aus:

G	1	x	x ²
p	20/56	30/56	6/56

Löse $E(G) = 0$ nach x auf.

Beide Lösungen sind sinnvoll. Bei der ersten Lösung wird der Gewinn 1 durch den Verlust von -0.792 wettgemacht. Bei der zweiten Lösung ist der Verlust von -4.208 gross, dafür ist aber $x^2 = 17.7$ und dieser grosse Gewinn hat zwar eine kleine Wahrscheinlichkeit, kompensiert aber den Verlust.]

9) Ein Vergleich

Die beiden Erwartungswerte sind genau gleich gross, nämlich $1.875 = \frac{15}{8}$

10) Faires Spiel

$$p_1 = 0.5856, p_2 = 0.0483.$$

[Man erzielt genau ein ☺ mit der Wahrscheinlichkeit $\binom{4}{1} \cdot p \cdot (1-p)^3$.]

11) Glücksrad

$$E(X) = 8, V(X) = 8, \sigma(X) = \sqrt{8}.$$

[vgl. Aufgabe 1.]

12) Zeugnisnoten würfeln

4.472

[Es gibt 36 mögliche Fälle. In einem Fall hat man Note 1, in drei Fällen Note 2, in 5 Fällen Note 3, usw.]

Zusatz: Für den Notendurchschnitt gibt es keine schöne Formel. Ein paar Werte:

n =	1	2	3	4	5
E(X) =	3.5	4.472	4.958	5.245	5.431

[Es gibt 6^n mögliche Fälle. In einem Fall hat man Note 1, in $2^n - 1$ Fällen erzielt man die Note 2, in $3^n - 2^n$ Fällen die Note 3, usw.]