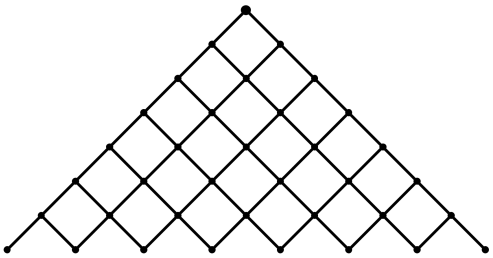
3. Anwendungen aus der Kombinatorik

3.1. Ziehen mit Zurücklegen

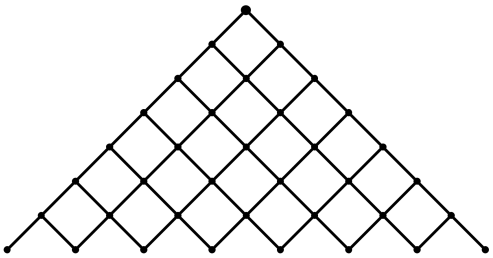
1. **Würfeln**

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 7 Würfen genau zwei Sechser zu erzielen?



2. **Glücksrad**

   Ein Glücksrad zeigt **X** mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$
   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens fünf **X** in 7 Drehungen?



3. **Münzwurf**

   Eine Münze wird 20 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens 13 **Kopf** erhalten hat?

4. **Vergleiche**

   a) Eine Münze wird 20 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man genau 13 **Kopf** erhalten hat?

   .....

   .....

   b) Man wirft 20 Münzen mit einem Wurf. Wie gross ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass man genau 13 **Kopf** erhalten hat?

   .....

   .....

5. **Verallgemeinerung**

   Ein Glücksrad zeigt **1** (Treffer) mit Wahrscheinlichkeit p. Man führt n Drehungen (Versuche) durch.
   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Einsen/Treffer? Und wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten für mindestens k Einsen resp. für höchstens k Einsen?

6. **Würfeln**

   Man würfelt mit einem idealen Würfel.

   a) Man würfelt 24 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau drei Einsen zu erhalten?

   b) Man würfelt 30 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 8 Dreierzahlen (3 oder 6) zu erhalten?

   c) Man würfelt 50 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens fünf, aber weniger als 15 Vierer erhält?

7. **Übungen aller Art**

a) Ein Glücksrad zeigt das Zeichen ★ mit 45%-iger Wahrscheinlichkeit. Wie gross ist die Chance, in 20 Drehungen mehr als zehn ★ zu erzielen?

b) In einem Behälter hat man 13 rote und 7 blaue Kugeln. Man zieht 10 Kugeln einzeln mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt man mehr als drei blaue Kugeln?

c) In einem Behälter hat man 12 weisse und 8 rote Kugeln. Man zieht 7 Kugeln einzeln mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt man mehr weisse als rote Kugeln?

d) In einem Behälter hat man 6 weisse und eine unbekannte Anzahl rote Kugeln. Man zieht fünf Kugeln mit Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, genau drei weisse Kugeln gezogen zu haben, beträgt 13.23%. Wie viele rote Kugeln hat es im Behälter?

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 6-buchstabiges Wort genau zwei Vokale hat? (Das Alphabet habe 26 Buchstaben, wovon 6 Vokale.)

8. **Glücksrad**

Ein Glücksrad zeigt die Zahlen 0, 1, 2, 3 mit den Wahrscheinlichkeiten $p(0) = 0.4$, $p(1) = 0.3$, $p(2) = 0.2$ und $p(3) = 0.1$. Das Rad wird achtmal gedreht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man zwei Nullen und je drei Einsen resp. Zweier?

Aus einer Prüfung

Ein Glücksrad zeigt **1** mit Wahrscheinlichkeit p.

a) Es sei $p = 36\%$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Einsen in 20 Drehungen?

b) Setze $p = 0.1$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Einsen in 10 Drehungen?

c) Die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Einsen in fünf Drehungen betrage 30.87 %. Wie gross ist p?

3.2. Ziehen ohne Zurücklegen

1. **Ein Vergleich**

   Betrachte und vergleiche die folgenden beiden Aufgabenstellungen:
   In einem Behälter hat man fünf weisse und drei rote Kugeln.

   a) Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen?

   b) Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine rote Kugel zu ziehen?

   Was kann man über die beiden Ergebnisse sagen?

   .....

   .....

2. **Abzählen**

   Lassen sich bei einem Zufallsexperiment die Anzahlen der günstigen und der möglichen Fälle mit Hilfe der Kombinatorik ermitteln **und sind alle Fälle gleich wahrscheinlich**, dann kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit einfach erhalten werden mit der Formel:

   .....

   Die obige Aufgabe 1b) ist jetzt mit Abzählen lösbar.
   (Es wird einfacher als mit einem Baumdiagramm.)

3. **Kugeln ziehen**

   In einem Behälter sind 12 weisse und 8 schwarze Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, unter 6 Kugeln, die man gleichzeitig herausnimmt, vier weisse und zwei schwarze zu haben?

4. **Lotto zum Ersten**

   Beim Lotto werden 6 Zahlen aus 49 gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig abgegebener Tipp (genau) drei Richtige enthält.

5. **Lotto zum Zweiten**

   Wie gross ist die Chance beim Lotto (6 aus 49) für mindestens 4 Richtige?

6. **Verallgemeinerung**

   In einem Behälter hat man m Kugeln, davon sind w weisse. Man zieht n Mal ohne Zurücklegen (oder mit einem Griff). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, genau k weisse zu erhalten. Bestimme ebenso die Wahrscheinlichkeiten für mindestens resp. höchstens k weisse.

7. **Karten verteilen**

Beim Schieber erhält jeder der 4 Spieler 9 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (irgend) ein Spieler alle vier Asse erhält?

8. **Kugeln ziehen**

In einem Behälter hat man 3 weisse und n blaue Kugeln.

a) Setze $n = 5$. Man zieht 4 Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau drei blaue Kugeln?

b) Setze $n = 12$. Man zieht 6 Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mehr blaue als weisse Kugeln?

c) Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau eine weisse zu ziehen, beträgt 52.5%. Wie viele blaue Kugeln hat man im Behälter? (Wie gross ist n?)

Freiwillige Übung

Ein Kartenspiel hat 36 Karten. Dabei sind je 9 Karten in den roten Farben Herz und Karo, je 9 Karten in den schwarzen Farben Pik und Treff. Spieler A erhält 9 Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

a) erhält er genau vier Herz-Karten?

b) erhält er acht schwarze Karten?

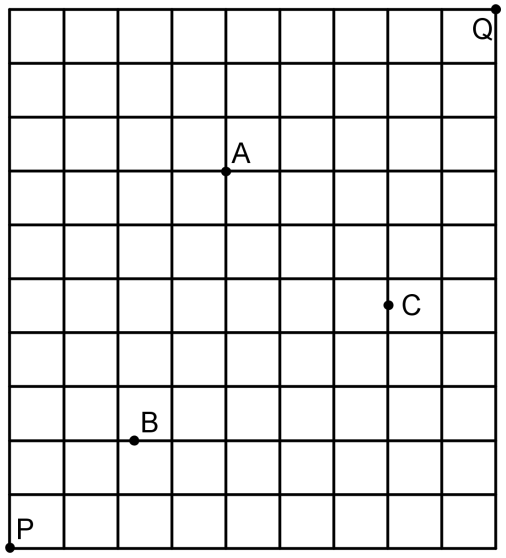
c) erhält er alle vier Asse?

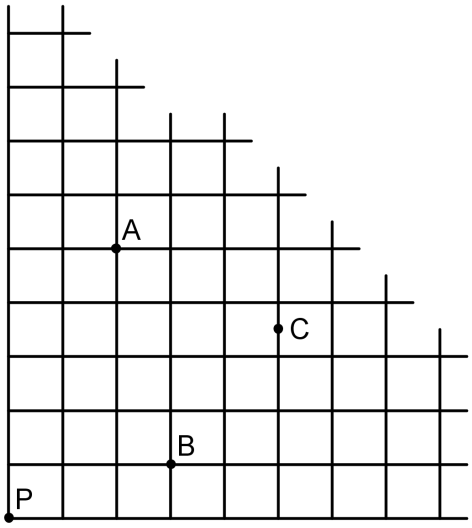
d) erhält er genau die beiden roten Asse?

3.3. Gitterwege

1. **Geschlossenes oder offenes Gitter**

   Es ist sehr entscheidend, ob das Gitter oben offen ist oder nicht. Je nach Situation kommen die Überlegungen fürs Ziehen mit resp. ohne Zurücklegen zum Tragen.





   Bei beiden Gittern startet Mr. X im Punkt P. Beim Gitter links ist Q sein Zielpunkt, d.h. nach 19 Wegstücken erreicht er den Punkt Q. Alle möglichen gleich langen Wege gelten als gleich wahrscheinlich.
   Beim Gitter rechts gibt es keinen Zielpunkt. Somit entscheidet sich Mr. X an jeder Kreuzung zufällig, ob er seinen Weg nach rechts oder nach oben fortsetzt.

2. **Obligatorischer Durchgangspunkt**

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Mr. X auf seinem Weg beim Punkt A vorbei?

3. **Zu meidender Durchgangspunkt**

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Mr. X auf seinem Weg beim Punkt B, aber nicht beim Punkt C vorbei?

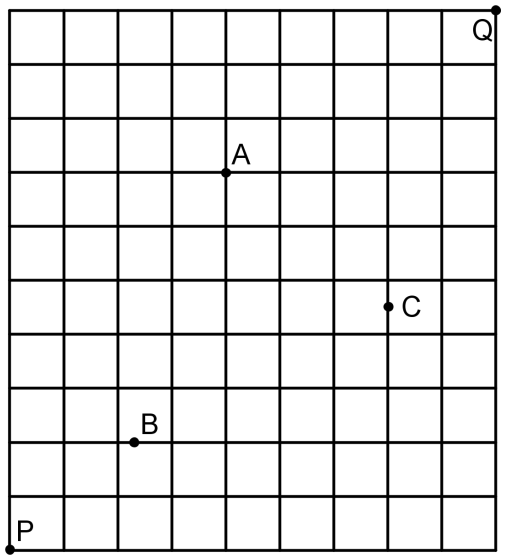
4. **Ziehen mit oder ohne Zurücklegen**

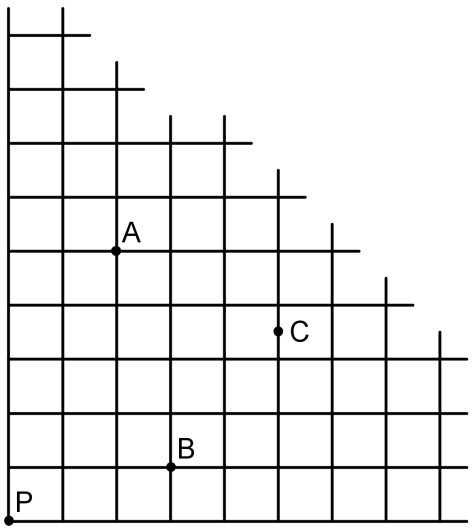
Wir halten fest:

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .





Knacknuss

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt Mr. X bei *genau* einem der Punkte A, B oder C vorbei? Löse sowohl fürs geschlossene, als auch fürs offene Gitter.