2. Mehrstufige Zufallsversuche

Übungen

1) Kugeln ziehen
Aus einem Behälter mit 3 roten und 5 blauen Kugeln zieht man zwei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die Kugeln verschiedene Farbe?

2) Zufallsgerät
Ein Zufallsgerät zeige nur die Zeichen "A" oder "B". Es sei so gefälscht, dass in jedem Versuch mit Wahrscheinlichkeit 0.77 die gleiche Zahl erscheint wie im vorangegangenen Versuch. Im ersten Versuch erschien "A". Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man im vierten Versuch "B"?

3) Ziehen ohne Zurücklegen
In einem Behälter befinden sich 20 Kugeln, nämlich 3 blaue, 5 rote und 12 weisse. Man zieht 3 Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man nur weisse Kugeln?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite Kugel blau und die dritte rot?

4) Unbekannte Anzahl Kugeln
In einem Behälter befinden sich 2 weisse und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Man zieht 4 Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in diesen vier Ziehungen die Farbe der Kugel immer wechselt, betrage $\frac{1}{150}$.
Wie viele rote Kugeln hat es im Behälter?

5) Die erste Aufgabe des Chevalier de Méré [1607 - 1684]
Was ist wahrscheinlicher: bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu werfen?

6) Historisches Beispiel
Es ist zu bestimmen, mit wie viel Würfen A es wagen kann, mit 2 Würfeln 12 Augen auf einmal zu werfen.
(Aus der "ars conjectandi" [Vermutungskunst] von Jakob Bernoulli [1654 - 1705])
Bemerkung: "es wagen können" heisst in diesem Zusammenhang: "seine Gewinn-Wahrscheinlichkeit ist grösser als die des Gegners, also grösser als 50%".

7) Karten ziehen
A wettet mit B, dass er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, 4 Karten von verschiedener Farbe herausziehen wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass A die Wette gewinnt?

8) Das "Rosinchen-Problem"
Wie viele Rosinen muss man in 500g Teig mischen, damit jedes 50g-Brötchen mit 99%-iger Sicherheit mindestens eine Rosine enthält?

9) Unendlich lange Pfade
Zwei Spieler (A und B) drehen abwechslungsweise ein Glücksrad, wobei A beginnt.
Wer das erste Gewinn-Zeichen ☺ erhält, gewinnt das Spiel.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ein ☺, wenn man weiss, dass A mit 70%-iger Wahrscheinlichkeit das Spiel gewinnt?

10) Historisches Beispiel

Warum erscheint beim Wurf dreier Würfel die Summe 10 öfter als die Summe 9, obwohl beide Summen auf 6 Arten eintreten können, nämlich:

$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$ resp.

$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 4 + 4 = 2 + 3 + 5 = 3 + 3 + 4$?

(Cardano [1501 - 1576] und Galilei [1564 - 1642])

11) Historisches Beispiel

Mit wie viel Würfeln kann A es unternehmen, auf den ersten Wurf 2 Sechsen zu werfen?
(Aus der "ars conjectandi" [Vermutungskunst] von Jakob Bernoulli [1654 - 1705])

12) Faires Spiel

Ein Glücksrad zeigt "1" mit Wahrscheinlichkeit p und "0" mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$
Zwei Spieler drehen das Rad gemäss folgenden Regeln: Zuerst dreht A einmal, dann B zweimal, dann wieder A einmal, B zweimal, A einmal usw. Wer die erste "1" erhält, gewinnt das Spiel.
Wie gross muss p sein, damit das Spiel fair ist?

13) Glücksrad

Ein Glücksrad zeigt die Ziffern 0, 1, ... 9 mit je gleicher Wahrscheinlichkeit.

a) Das Rad wird 3 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dreimal dieselbe Ziffer?
b) Das Rad wird 7 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt (mindestens) eine Ziffer mehrfach vor?
c) Wie oft muss das Rad gedreht werden, damit mit 99.99%-iger Sicherheit mindestens eine Null erhalten wurde?
d) Zwei Spieler drehen das Rad abwechslungsweise, bis die erste Fünf erscheint. Wer die erste Fünf erhält, gewinnt einen Preis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler, der die erste Drehung ausführt?

14) Maximale Gewinnwahrscheinlichkeit

In einem Behälter befinden sich 5 weisse und eine gewisse Anzahl roter Kugeln. Man zieht 4 Kugeln einzeln ohne Zurücklegen und gewinnt, wenn die dritte gezogene Kugel weiss und die vierte gezogene Kugel rot ist.

a) Es soll genau 8 rote Kugeln im Behälter haben.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man dieses Spiel?
b) Wie viele rote Kugeln muss es im Behälter haben, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{4}{21}$ betragen soll?
c) Die Gewinnwahrscheinlichkeit soll möglichst gross sein. Wie viele rote Kugeln muss es nun im Behälter haben?
   Berechne ausserdem diese maximale Gewinnwahrscheinlichkeit?