

2. Mehrstufige Zufallsversuche

2.1. Die Pfadregeln

1. **Bemerkung**

Häufig wird ein Versuch nicht nur einmal durchgeführt, sondern besteht aus mehreren Versuchsstufen:

- a) Im Zahlenlotto werden 6 Zahlen aus 49 gezogen.
- b) Bei Umfragen werden wohl mehrere Personen gefragt.
- c) Bei allen Glücksspielen werden mehrere Spielrunden durchgeführt.
- d) (usw.)

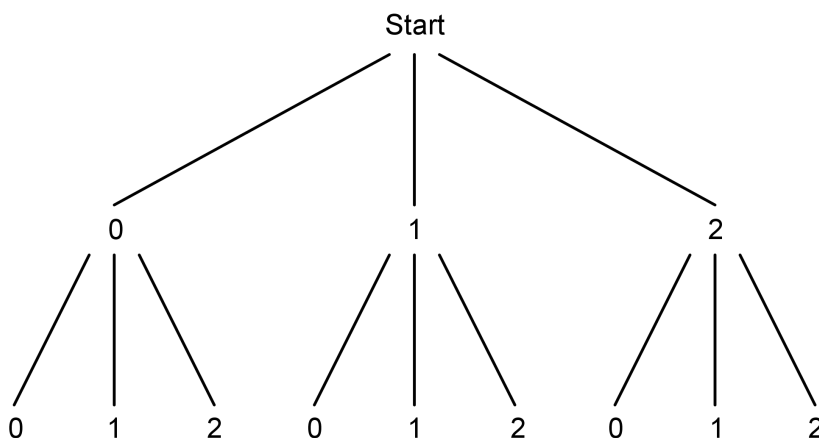
2. **Musterbeispiel**

Ein Glücksrad zeige die Zahlen 0, 1 und 2 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten: $p(0) = 0.5$, $p(1) = 0.3$ und $p(2) = 0.2$.

Das Rad werde zwei Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint in beiden Drehungen dieselbe Zahl?

Die Ergebnismenge zu diesem Versuch hat neun Elemente, nämlich 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 und 22. Dabei bedeutet 02 eine Null in der ersten und eine 2 in der zweiten Stufe.

Am besten zeichnet man zu diesem Versuch ein **Baumdiagramm**:



$p = \dots\dots\dots$

Jedem Ergebnis entspricht also ein Pfad im Baum. Zwei gleiche Zahlen erscheinen in den Fällen 00, 11 und 22. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt

$\dots\dots\dots$

denn es erscheinen *entweder* zwei Nullen *oder* zwei Einsen *oder* zwei Zweier.

3. Pfadregeln

Die beiden grundlegenden Regeln für Wahrscheinlichkeiten in mehrstufigen Versuchen können am obigen Beispiel bereits herausgelesen werden:

.....
.....
.....
.....

Die Pfadregeln entsprechen der Summen- bzw. Produktregel aus der Kombinatorik.

4. Kontrollmöglichkeiten

Im Baumdiagramm hat man Kontrollmöglichkeiten:

Die Summe aller Pfad-Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben.

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten von einem Knotenpunkt des Baumdiagramms *nach unten* muss ebenfalls 1 ergeben.

5. Bemerkung

Die Beispiele auf den folgenden Seiten sind Musterbeispiele für verschiedene Anwendungen. Es geht stets darum, ein korrektes und möglichst günstiges Baumdiagramm herzustellen.

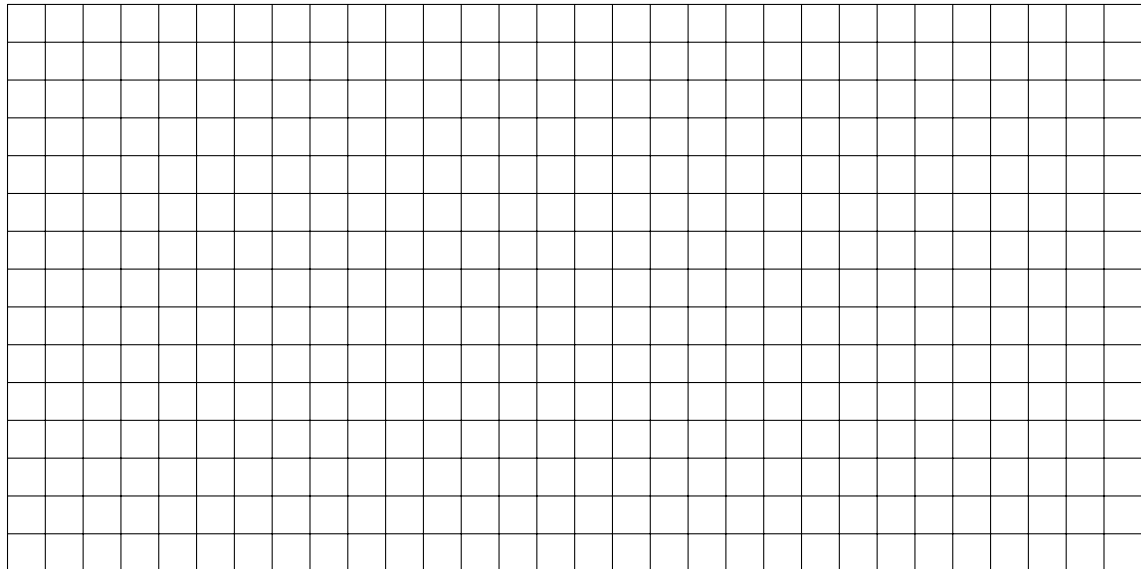
Manchmal lohnt es sich auch, nur einen Teil des Baumdiagramms zu zeichnen.

4. Wetterprognose

Es gelte folgende Wetterregel: Auf einen trockenen Tag folgt mit Wahrscheinlichkeit 0.8 ebenfalls ein trockener Tag (und logischerweise mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ein nasser). Auf einen Tag mit nassem Wetter folgt jedoch mit Wahrscheinlichkeit 0.6 ein nasser (und mit Wahrscheinlichkeit 0.4 ein trockener) Tag.

Am Sonntag ist es trocken und wir wollen eine Prognose für Dienstag und Mittwoch machen.

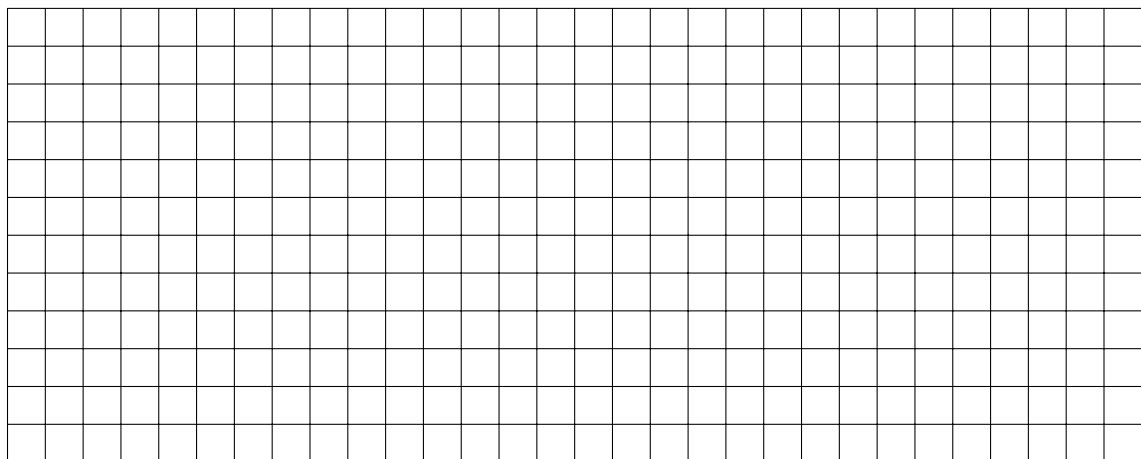
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es am Dienstag nass?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es am Mittwoch trocken?



5. Unbekannte Wahrscheinlichkeit

Ein Glücksrad zeigt das Zeichen \odot mit Wahrscheinlichkeit p und das Zeichen \boxplus mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau ein \odot zu erzielen, beträgt 42%.

Wie gross ist p ?



2.3. Spezielle Aufgabentypen

1. Glücksrad

Ein Glücksrad zeigt das Zeichen \odot mit Wahrscheinlichkeit 0.8 und das Zeichen \oplus mit Wahrscheinlichkeit 0.2. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man mindestens ein \odot ?

2. Mindestens ein Treffer

Ein milder Lehrer erteilt seine Noten auf folgende Art: er würfelt einen Würfel dreimal und gibt die höchste vorkommende Zahl als Note.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erteilt er eine **6**?

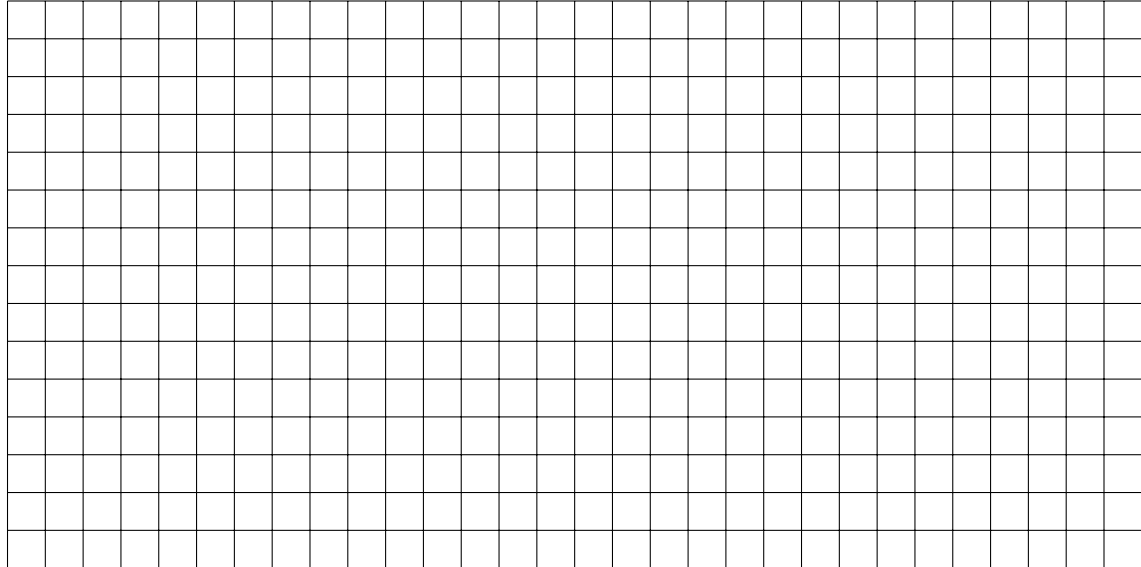
3. Unbekannte Anzahl Versuche

Wie oft muss ein Würfel geworfen werden, damit mit 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit (mindestens) eine **6** geworfen wird?

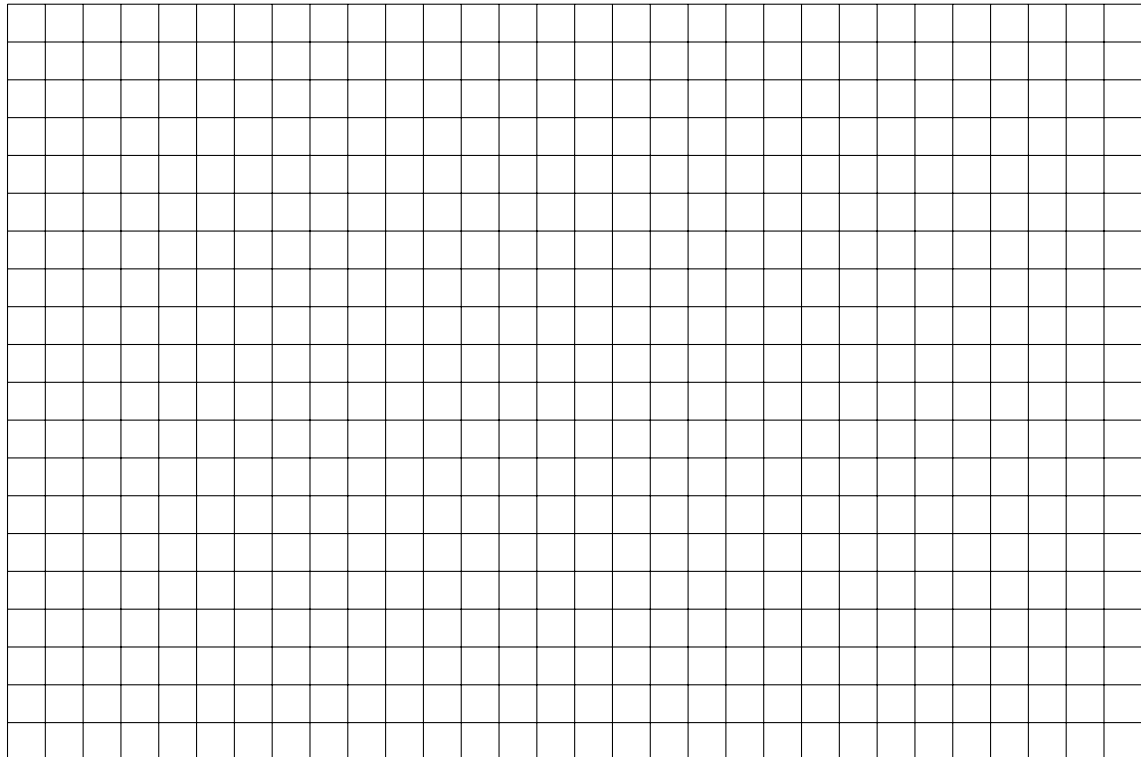
7. Verschieden lange Pfade

In einem Behälter befinden sich drei weiße und zwei rote Kugeln. Zwei Spieler ziehen abwechselungsweise eine Kugel ohne Zurücklegen. Wer zuerst eine rote Kugel zieht, gewinnt das Spiel.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler, der zuerst zieht?

**8. Unendlich lange Pfade**

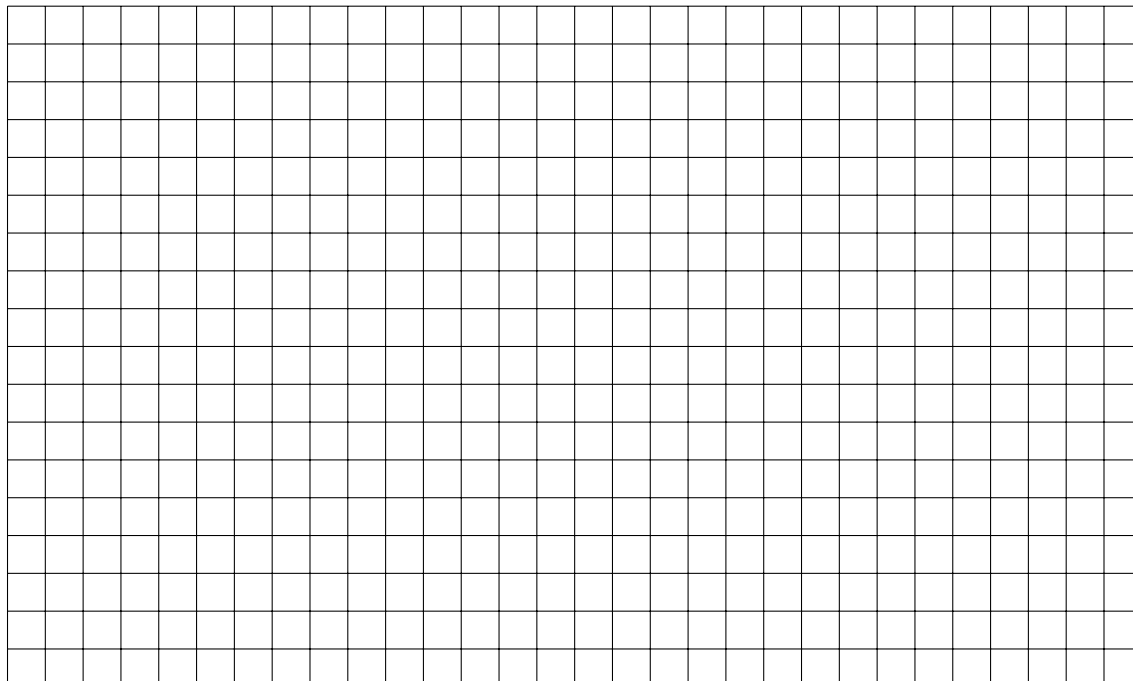
Zwei Spieler (A und B) werfen abwechselungsweise einen Würfel, wobei A beginnt. Wer die erste 6 wirft, gewinnt das Spiel. In welchem Verhältnis stehen die Gewinn-Wahrscheinlichkeiten?



9. Repetitionsbeispiel

Gegeben ist ein normaler Würfel.

- Man würfelt dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint dreimal dieselbe Zahl?
- Man würfelt fünfmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt (mindestens) eine Zahl mehrfach vor?
- Wie oft muss man würfeln, damit man mit 99.99%-iger Sicherheit mindestens eine 5 erhalten hat?

**Lernkontrolle**

In einem Behälter hat man 6 weisse, 4 rote und n blaue Kugeln.
(Diese Ausgangslage gilt für alle Teilaufgaben.)

- Setze $n = 2$. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man dreimal dieselbe Farbe?
- Setze $n = 10$. Man zieht drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei weisse und eine blaue Kugel?
- Man zieht zwei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei genau eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt exakt 50%.
Wie viele blaue Kugeln hat man, d.h. wie gross ist n ?