Wahrscheinlichkeiten

1. Einstufige Zufallsversuche

1.1. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

1. **Einführungstext**

   Wenn man einen (üblichen) Würfel sehr oft wirft, dann darf man erwarten, dass jede Zahl etwa gleich häufig vorkommt. Folglich wird man etwa in einem Sechstel aller Fälle eine **6** erhalten. Das Wort *etwa* im vorhergehenden Satz ist wichtig, denn es ist absolut nicht sicher, dass man bei 60 Würfen genau 10 Sechser erzielen wird. Man macht beim Durchführen des Experiments also einen kleinen Messfehler.
   Je mehr Würfe man durchführt, desto präziser wird das Ergebnis sein. Bei 600 Würfen wird man wohl nicht exakt 100 Sechser erhalten, aber der Fehler wird (relativ gesehen) immer kleiner, je mehr Würfe man durchführt.
   Die relative Häufigkeit (Anzahl der erzielten Sechser dividiert durch die Anzahl der Würfe) wird sich also bei grosser Anzahl Würfe einem Wert nähern. Bei diesem einfachen Zufallsversuch ist klar, dass dieser Grenzwert $\frac{1}{6}$ beträgt.
   Es macht dann Sinn, diesen Wert als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer **6** festzulegen.

2. **Historisches**

   Bis vor etwa 300 Jahren war der Begriff einer Wahrscheinlichkeit nicht bekannt. Die Mathematiker Blaise Pascal, Pierre de Fermat und Pierre Simon Laplace entdeckten und entwickelten die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts.

3. **Zufallsversuche**

   Normalerweise ist bei einer mathematischen Aufgabe das Ergebnis klar. Eine Aufgabe aus der Geometrie mag vier verschiedene Lösungen haben, eine Gleichung hat unter Umständen keine, eine, mehrere oder auch unendlich viele Lösungen.
   Bei einem Zufallsexperiment oder Zufallsversuch sind die möglichen Ergebnisse auch klar. Der Unterschied zu anderen Aufgaben aus der Mathematik besteht darin, dass man beim Starten des Versuchs *nicht weiss*, welches der möglichen Ergebnisse eintritt. Der Zufall ist also nicht bei den Ergebnissen selbst zu suchen, sondern bei der Tatsache, dass aus den möglichen Ergebnissen eines zufällig eintreten wird.

4. **Beispiele**

   Zufallsversuche gibt es in vielen verschiedenen Versionen. Bekannte Beispiele:

   a) Würfeln. Die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Zahl beträgt $\frac{1}{6}$, wenn der Würfel nicht gezinkt ist.

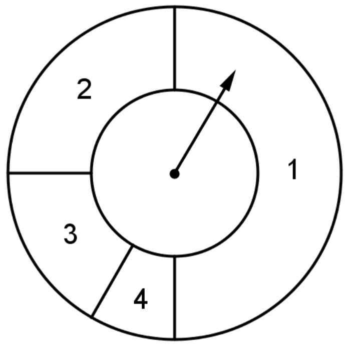
   b) Drehen eines Glücksrades.

   c) Lotto, Zahlenlotto usw.

   d) Roulette. Im europäischen Roulette gibt es 37 Zahlen (0 bis 36). Die Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zahl beträgt $\frac{18}{37}$ (und nicht $\frac{1}{2}$).

5. **Beispiel**

Ein Glücksrad (siehe die Figur) zeige Zahlen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten.
Wir kennen die möglichen Ergebnisse und notieren sie als Menge:



. . . .

Für jedes der möglichen Ergebnisse gibt es eine Wahrscheinlichkeit (dafür, dass dieses betreffende Ergebnis beim Drehen des Glücksrads erzielt wird).

. . . .

6. **Definition**

. . . .

. . . .

. . . .

7. **Beispiel (Fortsetzung)**

Wie gross ist beim obigen Glücksrad die Wahrscheinlichkeit, dass man eine gerade Zahl erzielt?
Die beiden möglichen Ergebnisse dafür sind 2 und 4. Wir betrachten also eine Teilmenge der Ergebnismenge und nennen das ein Ereignis.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses . . . .

. . . .

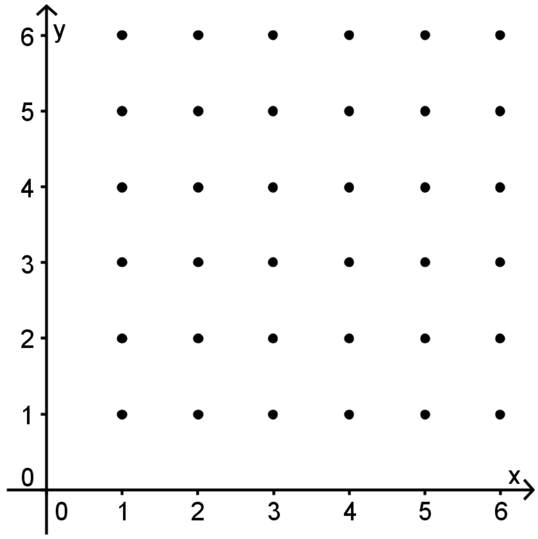
. . . .

8. **Zusammenfassung**

1.2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

1. **Musterbeispiel**

   Ein roter und ein blauer Würfel werden gleichzeitig geworfen und wir betrachten die beiden oben liegenden Zahlen. Bei dieser Versuchsanordnung sind 36 Ergebnisse möglich, die wir in einer Grafik darstellen. Wenn wir uns beispielsweise die rote Zahl auf der x-Achse, die blaue auf der y-Achse abgetragen denken, dann steht der Punkt ganz links oben für den Wurf einer blauen **6** und roten **1**.
   Naheliegenderweise ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis dasselbe, beträgt also $\frac{1}{36}$.



2. **Wahrscheinlichkeiten rechnen**

   Berechne die Wahrscheinlichkeiten

   a) Der rote Würfel zeigt eine **4** und der blaue eine **3**. ....

   b) Das Produkt der beiden gewürfelten Zahlen beträgt 30. ....

   ....

   c) Die beiden Zahlen sind gleich.(Wurf eines Pasch). ....

   ....

   d) Die Augensumme beträgt 6. ....

   ....

   e) Die rote Zahl ist kleiner als 3. ....

   ....

   ....

   f) Die rote Zahl ist kleiner als die blaue. ....

   ....

   ....

   ....

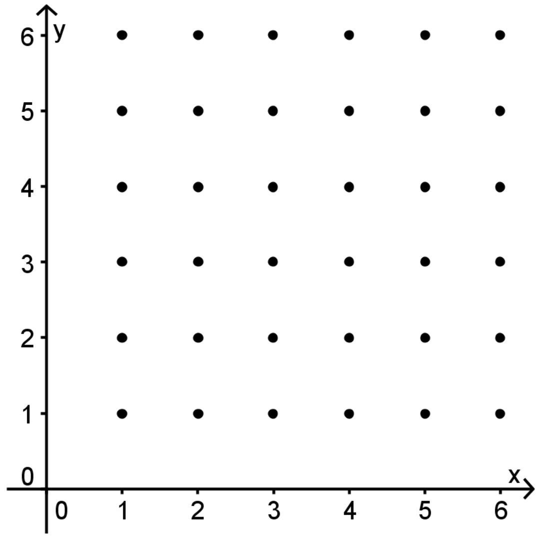
   Wir halten fest: Wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, ...

   ....

   ....

3. **Bemerkung**

Mit dem Musterbeispiel können wir die Regeln fürs Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten finden. Es gilt immer noch, dass ein roter und ein blauer Würfel gleichzeitig geworfen werden.



4. **Sicheres und unmögliches Ereignis**

a) Die Summe der Zahlen ist kleiner als 14.

b) Das Produkt der Zahlen beträgt 14.

Wir halten fest:

5. **Gegenteil, Gegenereignis**

Die Summe der beiden Zahlen ist grösser als 3.

Wir halten fest:

Sprachliche Finessen:

6. **Vereinigung von Ereignissen**

Der rote Würfel zeigt eine **4** oder der blaue Würfel eine **3**.

Wir halten fest:

7. **Entweder . . . oder . . .**

Es zeigt entweder der rote Würfel eine **4** oder der blaue eine **3**. ....

....

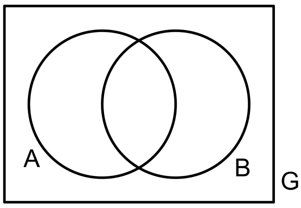
....

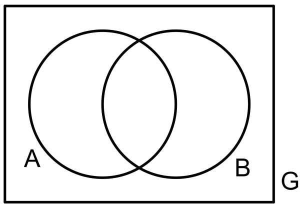
Wir halten fest: ....

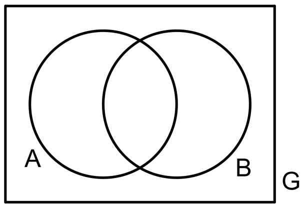
....

....

Illustrationen:







8. **Disjunkte Ereignisse**

Die Summe der Zahlen beträgt 5 oder 6. ....

Wir halten fest: ....

....

....

> **Überlegungsaufgabe**
> Drücke die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
> **D = A, aber nicht B**
> durch die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$ sowie $P(A \cap B)$ aus.

9. **Abgrenzen von Vereinigung und Schnitt**
Gegeben ist $P(A) = 0.75$ und $P(B) = 0.35$.

a) Wie gross ist $P(A \cap B)$ mindestens? ....

b) Wie gross ist $P(A \cap B)$ höchstens? ....

c) Wie gross ist $P(A \cup B)$ mindestens? ....

d) Wie gross ist $P(A \cup B)$ höchstens? ....

10. **Übung**
In einem Behälter hat man 7 weisse, 5 rote und 8 blaue Kugeln. Man zieht eine Kugel.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die (gezogene) Kugel rot?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kugel nicht blau?

11. **Übung**
In einem Behälter hat man 5 weisse, 3 rote und n blaue Kugeln. Man zieht eine Kugel.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel rot ist, beträgt $\frac{1}{5}$. Wie gross ist n?

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel blau ist, beträgt $\frac{5}{9}$. Wie gross ist n jetzt?

Freiwillige Zusatzübung

In einem Behälter hat man 18 Kugeln, welche mit **1**, **1**, **1**, **1**, **1**, **1**, **2**, **2**, **2**, **2**, **3**, **3**, **3**, **4**, **4**, **5**, **5** resp. **6** beschriftet sind. Man zieht eine Kugel und notiert sich die gezogene Zahl.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die notierte Zahl eine **1**?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl gerade?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl keine **4**?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl grösser als **3**?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Zahl eine Primzahl?

f) Nun legt man zu den 18 Kugeln noch einige dazu, welche mit einer **7** beschriftet sind. Wie viele solche Kugeln muss man dazulegen, damit die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Zahl zu ziehen, genau $\frac{3}{4}$ beträgt?