

Vektorgeometrie IV: Maturaufgabe

Lösungen

1) Pyramide

<p>Lege die Normalebene α zu g durch A. α: $-2x + y + 2z - 3 = 0$ α mit g schneiden. $B(4 3 4)$ Vektor von B nach A und somit Grundkantenlänge 6.</p>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [2 4 6]+t*[-2 1 2] solve(-2*(2-2*t)+t+4+t=-1) t=-1 [2 4 6]+t*[-2 1 2] t=-1 [4 3 4] [4,6]+t*[-2,1,2] t=-1 MAIN DEGRAUTO FUNC 3/30</pre>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [2 4 6]+t*[-2 1 2] t=> [4 3 4] norm([4 3 4]-[0 -1 2]) 6 [4 3 4]-[0 -1 2] [4 4 2] [4,3,4]-[0,-1,2] MAIN DEGRAUTO FUNC 5/30</pre>
<p>r_g hat Länge 3, also verdoppeln und in A sowie in B anhängen. $C(0 5 8)$, $D(-4 1 6)$. Quadratmittelpunkt = Mitte von AC = Höhenfusspkt. $M(0 2 5)$</p>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [4 4 2] norm([-2 1 2]) 3 [4 3 4]+2*[-2 1 2] [0 5 8] [0 -1 2]+2*[-2 1 2] [-4 1 6] [0,-1,2]+2*[-2,1,2] MAIN DEGRAUTO FUNC 8/30</pre>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [0 5 8] [0 -1 2]+2*[-2 1 2] [-4 1 6] [0 -1 2]+[0 5 8] 2 [0 -1 2]+[0 5 8]/2 MAIN DEGRAUTO FUNC 9/30</pre>
<p>Richtung der Raumhöhe. Also lautet die Raumhöhe $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ h mit $y + 4z - 10 = 0$ schneiden. Das ergibt $S(-2 6 1)$.</p>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [0 2 5] crossP([4 4 2],[-2 1 2]) [6 -12 12] crossP([4 4 2],[-2 1 2]) 6 [1 -2 2] sP([4,4,2],[-2,1,2])/6 MAIN DEGRAUTO FUNC 11/30 F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [0 2 5]+t*[1 -2 2] [t 2-2*t 2*t+5] solve(2-2*t+4*(2*t+5)-10=0,t) t=-2 [0 2 5]+t*[1 -2 2] t=> [-2 6 1] [0,2,5]+t*[1,-2,2] t=-2 MAIN DEGRAUTO FUNC 14/30</pre>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [0 2 5] [1 -2 2] [0 2 5]+t*[1 -2 2] [t 2-2*t 2*t+5] solve(2-2*t+4*(2*t+5)-10=0,t) t=-2 MAIN DEGRAUTO FUNC 13/30</pre>

2) Umkugel

<p>Das Kugelzentrum Z liegt sicher auf h und muss z.B. von A und S gleich weit entfernt sein. Also die Mittelnormalebene von AS mit h schneiden. Das gibt Z. $M_{AS}(-1 2.5 1.5)$ $Z(-0.5 3 4)$</p>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren [-2 6 1]-[0 -1 2] [-2 7 -1] 1/2*([-2 6 1]+[0 -1 2]) [-1. 2.5 1.5] -2*x+7*y-z-18=0 -2*x+7*y-z-18=0 -2*x+7*y-z-18=0 -2*x+7*y-z-18=0 MAIN DEGRAUTO FUNC 17/30</pre>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren -2*x+7*y-z-18=0 -2*x+7*y-z-18=0 solve(-2*t+7*(2-2*t)-(-1)=-1/2) t=-1/2 [0 2 5]-.5*[1 -2 2] [-.5 3. 4.] [0,2,5]-0.5*[1,-2,2] MAIN DEGRAUTO FUNC 19/30</pre>
<p>$r = \ \vec{ZS}\ = 4.5$. Also lautet die Kugelgleichung $(x + 1/2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 4.5^2$.</p>	<pre>F1+ Diverse F2+ Algebra F3+ Analysis F4+ Funktionen F5+ Vektoren solve(-2*t+7*(2-2*t)-(-1)=-1/2) t=-1/2 [0 2 5]-.5*[1 -2 2] [-.5 3. 4.] norm([-0.5 3. 4.]-[-2 6 1]) 4.5 [[-.5,3.,4.]-[-2,6,1]] MAIN DEGRAUTO FUNC 20/30</pre>	

<p>Für die ganze Aufgabe gibt es zwei Lösungen: B ist eindeutig, aber beim Bestimmen von C und D kann man den Vektor auch in die andere Richtung anhängen.</p>	<p>Ecken $C(8 1 0)$ und $D(4 -3 -2)$ Quadratmittelpunkt $M(4 0 1)$ Pyramidenspitze $S(5 -2 3)$ Kugelzentrum $Z(3.5 1 0)$, Radius $r = 4.5$ Kugelgleichung: $(x - 3.5)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4.5^2$</p>
--	---