

Vektorgeometrie III: Kugeln

Lösungen

1) Tangentialebene

a) quadratisches Ergänzen	$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 5)^2 = 43 + 4 + 9 + 25 = 81$ $\Rightarrow M(-2 3 5), r = 9.$																				
b) Für P gibt es 2 Lösungen. Wähle $z = 13$. Also MP rechnen und einsetzen. $4x + y + 8z - 116 = 0$	<table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare [-2 \ 3 \ 5] \rightarrow m \quad [-2 \ 3 \ 5]$ $\blacksquare [2 \ 4 \ z] \rightarrow p \quad [2 \ 4 \ z]$ $\blacksquare \text{solve}(\text{norm}(p - m) = 9, z)$ $z = 13 \text{ or } z = -3$ $\blacksquare p - m z = 13 \quad [4 \ 1 \ 8]$ $p - m z = 13$ </p> <table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare \text{solve}(\text{norm}(p - m) = 9, z)$ $z = 13 \text{ or } z = -3$ $\blacksquare p - m z = 13 \quad [4 \ 1 \ 8]$ $\blacksquare \text{dotP}([4 \ 1 \ 8], p) z = 13$ 116 $\text{DotP}([4, 1, 8], p) z = 13$ </p>	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	

2) Kürzester Abstand

Kugelradius $r = 9$ Abstand von M zur Ebene $d = 12$ mit HNF lösen. M liegt auf der positiven Seite, d.h. n_ϵ zeigt von ϵ nach M und hat Länge 3. Also mit 3 resp. 4 strecken und in M anhängen.	<table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare \text{norm}([2 \ 1 \ 2] - [6 \ 5 \ -5])$ 9 $\blacksquare \frac{2 \cdot 6 + 5 - 2 \cdot (-5) + 9}{\text{norm}([2 \ 1 \ -2])}$ 12 $\blacksquare \text{norm}([2 \ 1 \ -2])$ 3 $\text{Norm}([2, 1, -2])$ </p> <table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare \text{norm}([2 \ 1 \ -2])$ 12 $\blacksquare \text{norm}([2 \ 1 \ -2])$ 3 $\blacksquare [6 \ 5 \ -5] - 3 \cdot [2 \ 1 \ -2]$ $[0 \ 2 \ 1]$ $\blacksquare [6 \ 5 \ -5] - 4 \cdot [2 \ 1 \ -2]$ $[-2 \ 1 \ 3]$ $[6, 5, -5] - 4 * [2, 1, -2]$ </p>	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
andere Variante: Das Lot von M auf die Ebene mit der Kugel und mit der Ebene schneiden. Der Punkt mit $t = -3$ liegt näher bei der Ebene.	<table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare \text{solve}([2 \cdot t + 6 \ t + 5 \ -2 \cdot t - 5])$ $t = 3 \text{ or } t = -3$ $\blacksquare \text{solve}(2 \cdot (2 \cdot t + 6) + t + 5 - 2)$ $t = -4$ $[6] + (t+5) - 2 \cdot (2t-5) + 9 = 0, t$ </p> <table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $t = -4$ $\blacksquare [6 \ 5 \ -5] + t \cdot [2 \ 1 \ -2] t$ $[-2 \ 1 \ 3]$ $\blacksquare [6 \ 5 \ -5] + t \cdot [2 \ 1 \ -2] t$ $[0 \ 2 \ 1]$ $[5, -5] + t * [[2, 1, -2]] t = -3$ </p>	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	

Punkte $K(0 | 2 | 1)$ und $E(-2 | 1 | 3)$

3) Kugeltangente

Idee: Gerade g und Kugel k schneiden. Dann darf es nur eine Lösung für t geben. Das ist der Fall, wenn die Diskriminante $D = 4 - b^2 = 0$ wird. Also $b = 2$ oder $b = -2$. Zusatz: (rechts) man sieht, dass es für $b = 2$ nur eine Lösung gibt. Berührungspunkt $B(-2/3 1/3 2/3)$.	<table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare \text{solve}((b \cdot t)^2 + (1 + 2 \cdot t)^2 + t)$ $t = \frac{-\sqrt{4 - b^2} + 3}{b^2 + 5} \text{ or } t = \frac{\sqrt{4 - b^2} + 3}{b^2 + 5}$ $\blacksquare \text{solve}([2t, 1+2t, 1+t] \cdot [2, 1, -2])^2 = 1, t$ </p> <table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $b^2 + 5$ $\blacksquare \text{solve}((b \cdot t)^2 + (1 + 2 \cdot t)^2 + t)$ $t = -1/3$ $\blacksquare [2 \cdot t \ 1 + 2 \cdot t \ 1 + t] t = -1/3$ $[-2/3 \ 1/3 \ 2/3]$ $[2t, 1+2t, 1+t] t = -1/3$ </p>	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	

4) Kleinstmögliche Kugel

Idee: Der kürzeste Abstand von P zur Geraden ist ein Kugeldurchmesser $L(14 -2 19)$ $M(10 -3 11)$ $r = 9$ (Abstand von M zu L)	<table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $\blacksquare [-2 \ 30 \ 23] - [-2 \ 22 \ 22]$ $[-4 \ 8 \ 1]$ $\blacksquare -4 \cdot 6 + 8 \cdot (-4) + 3$ -53 $\blacksquare \text{solve}(-4 \cdot (2 - 4 \cdot t) + 8 \cdot (22 - t))$ $t = -3$ $\blacksquare +8(22+8t) + (22+t) + 53 = 0, t$ </p> <table border="1"> <tr> <th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>F5</th> </tr> <tr> <td>Diverse</td><td>A13ebra</td><td>Analysis</td><td>Funktionen</td><td>Vektoren</td> </tr> </table> <p> $t = -3$ $\blacksquare [2 \ 22 \ 22] + t \cdot [-4 \ 8 \ 1]$ $[14 \ -2 \ 19]$ $\blacksquare \frac{[14 \ -2 \ 19] + [6 \ -4 \ 3]}{2}$ $[10 \ -3 \ 11]$ $\blacksquare \frac{([14, -2, 19]) + ([6, -4, 3])}{2}$ </p>	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren	F1	F2	F3	F4	F5	Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	
F1	F2	F3	F4	F5																	
Diverse	A13ebra	Analysis	Funktionen	Vektoren																	

Kugelgleichung:
 $(x - 10)^2 + (y + 3)^2 + (z - 11)^2 = 81$