3. Das Vektorprodukt

3.1. Definition und Berechnung des Vektorprodukts

1. **Definition**

   Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum.
   Man definiert den Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt:

   Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von zwei Vektoren gibt es nur im dreidimensionalen Raum.

2. **Eigenschaften**

   a) $\vec{a} \times \vec{b} =$ ....

   b) Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, dann ....

3. **Bemerkung**

   Mathematisch saubere Sprechweise: Wenn zwei Vektoren kollinear sind, dann ergibt das Vektorprodukt dieser beiden Vektoren nicht Null, sondern dann ergibt das Vektorprodukt der beiden Vektoren den Null*vektor*.
   Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann Null ergeben, das Vektorprodukt nie.

4. **Einheitsvektoren**

5. **Berechnung des Vektorprodukts**

Hier folgt die Herleitung der Formel, wie man das Vektorprodukt von zwei gegebenen Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ berechnet. Es ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$

6. **Beispiele**

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ -b \end{pmatrix} =$

Übungen

$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a \\ -3a \\ 3b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2a \\ -4a \\ b \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix} =$

3.2. Anwendungen des Vektorprodukts

1. **Senkrecht stehende Vektoren**

   a) Bestimme einen Vektor der Länge 3, welcher auf $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

   b) Wie viele Lösungen hat die obige Aufgabe?

2. **Flächen berechnen**

   a) Vom Parallelogramm $ABCD$ kennt man $A(2|1|5)$, $B(4|4|7)$, $C(3|8|2)$. Berechne die Fläche dieses Parallelogramms.

   b) Berechne die Fläche des Dreiecks $A(4|1|3)$, $B(2|5|4)$, $C(3|-2|0)$.

   c) Das Dreieck $A(3|1|1)$, $B(2|4|0)$, $C(1|t|4)$ hat Fläche 12. $t=$?

3. **Eine zweidimensionale Aufgabe**

   Berechne die Fläche des Parallelogramms $A(2|-3)$ $B(5|0)$ $C(4|8)$ $D(1|5)$. Wie macht man aus dieser zweidimensionalen Aufgabe eine dreidimensionale?

4. **Komplanare Vektoren**

   Zeige, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

   Drei Vektoren sind komplanar, wenn ....

   ....

   Es gibt zwei Lösungsansätze:

   ....

   ....

5. **Vier Punkte**

   Wie kann man mit Hilfe des Vektorproduktes entscheiden, ob vier Punkte in einer Ebene liegen?

   ....

   a) Liegen $A(2|1|8)$, $B(3|7|9)$, $C(4|3|6)$ und $D(6|1|0)$ in einer Ebene?

   b) $A(2|1|8)$, $B(3|7|9)$, $C(4|t|6)$ und $D(6|1|0)$ liegen in einer Ebene. $t=$?

Lernkontrolle

Gegeben sind die Punkte $A(2|1|4)$, $B(5|7|10)$, $C(6|8|11)$ und $D(4|4|7)$.

a) Weise nach, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.

b) Zeige, dass es sich bei $ABCD$ um ein Trapez handelt und berechne seine Fläche.