

2. Das Skalarprodukt

2.1. Definition und Berechnung des Skalarprodukts

1. Berechnungen

Löse möglichst ohne Taschenrechner:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \quad \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix} =$$

2. Spitzer Winkel

Löse ohne Taschenrechner:

Für welche Werte von t schliessen die Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (bei gleichem Anfangspunkt) einen spitzen Winkel ein?

2.2. Anwendungen des Skalarprodukts

1. Winkel zwischen zwei Vektoren

Bestimme den Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Senkrecht stehende Vektoren

Für welchen Wert von t stehen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander?

3. Winkelberechnungen

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$.

- Berechne den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} .
- Die Vektoren \vec{a} und \vec{c} sollen einen Winkel von 50° einschliessen. Berechne t .

4. Dreieck

Berechne den Winkel β im Dreieck ABC .

$A(3|1|-5)$, $B(-1|3|9)$, $C(-3|7|7)$

5. **Dreieck (Aus einer Prüfung)**

Gegeben ist das Dreieck ABC : $A(4|2|1)$, $B(2|7|4)$, $C(3|9|7)$.

- Berechne den Winkel β .
- Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts.
- Ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm $ABCD$. Bestimme die Koordinaten von D .

6. **Eckpunkt gesucht**

Vom Dreieck ABC mit Winkel $\alpha = 45^\circ$ kennt man $A(2|0|3)$, $B(0|2|4)$ und weiss, dass C auf der z -Achse liegt.

Bestimme die Koordinaten von C .

7. **Vierecke**

Gegeben ist ein Viereck $ABCD$. Um was für ein Viereck handelt es sich? (Quadrat, Rechteck, ...?)

- $A(3|8|1)$, $B(9|14|4)$, $C(10|10|12)$, $D(4|4|9)$
- $A(3|8|1)$, $B(9|14|4)$, $C(12|8|10)$, $D(6|2|7)$
- $A(3|8|1)$, $B(9|14|4)$, $C(11|16|9)$, $D(7|12|8)$

8. **Dreieck (Aus einer Prüfung)**

Von einem Dreieck ABC kennt man $A(4|1)$, $B(9|6)$ und weiss, dass C auf der x -Achse liegt.

- Das Dreieck soll den Winkel $\alpha = 60^\circ$ haben. Wo liegt C ?
- Das Dreieck soll rechtwinklig sein. Wo liegt C ? (alle Lösungen!)
- Wo muss C liegen, damit das Dreieck einen stumpfen Winkel hat?

9. **Vierecke (Aus einer Prüfung)**

- Gegeben sind: $A(3|1|6)$, $B(4|5|14)$, $C(8|12|10)$, $D(7|8|2)$.

Behauptung: Das Viereck $ABCD$ ist ein Quadrat.

Wahr oder falsch? (Begründe durch passende Berechnungen)

- Gegeben sind: $F(6|0|8)$, $E(8|2|3)$, $L(-4|6|11)$, $S(0|2|12)$.

Behauptung: Das Viereck $FELS$ ist ein gleichschenkliges Trapez.

Wahr oder falsch? (Begründe durch passende Berechnungen)