

2. Das Skalarprodukt

2.1. Definition und Berechnung des Skalarprodukts

1. Definition

Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Dann ist das skalare Produkt dieser beiden Vektoren definiert durch

.....
.....

2. Eigenschaften

a) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

.....

b) Wenn die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} senkrecht aufeinander stehen,

.....

.....

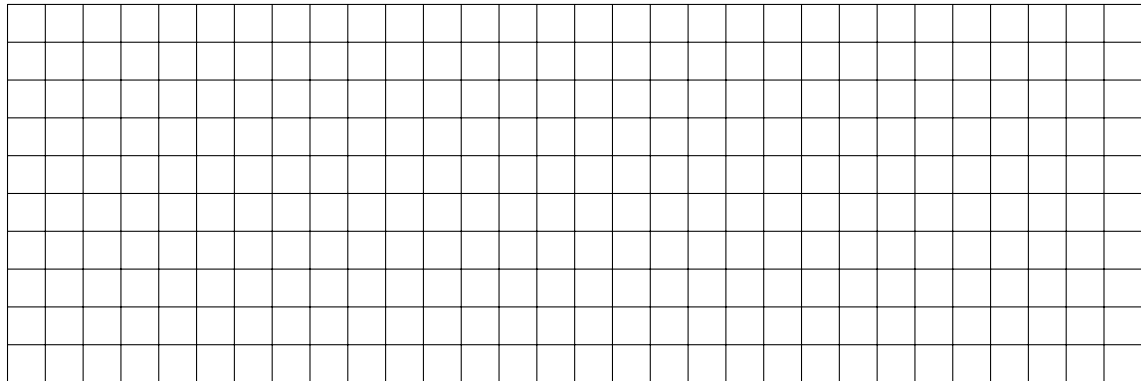
c) Für parallele Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt:

.....

d) Speziell gilt:

e) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

3. Einheitsvektoren



4. Bemerkung

Nun stellt sich die entscheidende Frage, wie man das Skalarprodukt berechnet, wenn die beiden Vektoren in Komponentenschreibweise gegeben sind.

Was ergibt also beispielsweise $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

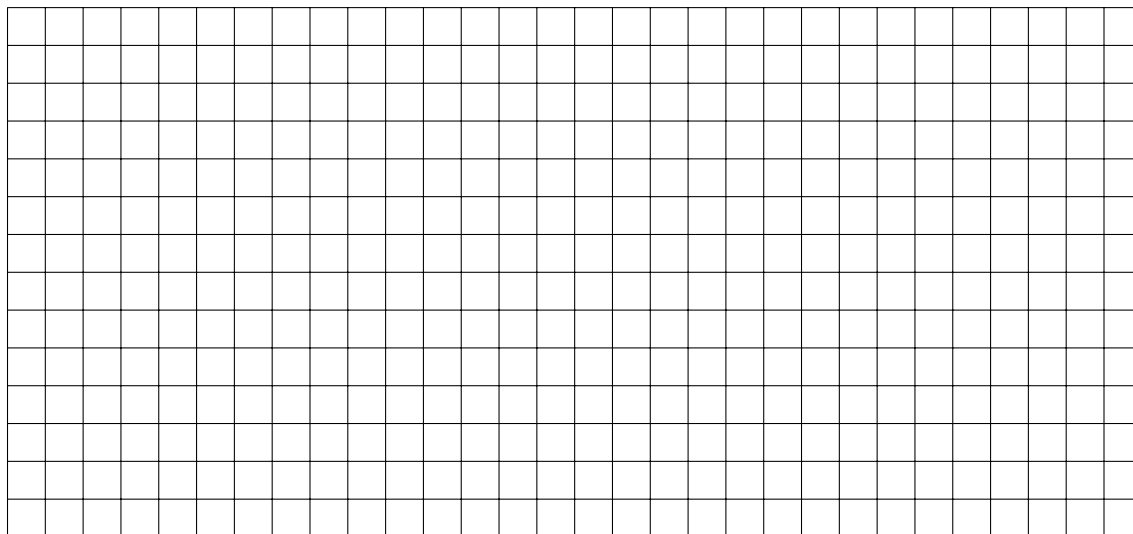
5. **Herleitung**

Wir machen folgende Vorbereitungsüberlegung:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist mit den Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen ausgedrückt:

.....

Damit können wir die Formel für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ herleiten.



6. **Formel**

Wir erhalten die wichtige Formel

.....

7. **Beispiele zwei- und dreidimensional**

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7a \\ -3b \\ 9a \end{pmatrix} =$$

Übung

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = ? \qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = ?$$

Folgerungen?

2.2. Anwendungen des Skalarprodukts

1. Senkrecht stehende Vektoren

- a) Weise nach, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zueinander senkrecht stehen.
- b) Bestimme t so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 8 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

2. Winkel zwischen zwei Vektoren

- a) Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 8 \end{pmatrix}$ sollen einen Winkel von $\alpha = 60^\circ$ einschliessen.
Wie gross ist t ?

3. Winkelberechnung im Dreieck

Wie gross ist der Winkel α des Dreiecks ABC ?
 $A(2|4|1)$, $B(1|0|8)$, $C(3|2|-1)$.

4. Anwendung

Der Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$ soll zu den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.
Bestimme p und q .

5. Anwendung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Zerlege den Vektor \vec{b} in zwei Vektoren, wobei der erste parallel und der zweite senkrecht zum Vektor \vec{a} stehen sollen.

Übung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Setze $t = 5$ und berechne den Winkel zwischen den Vektoren.
- b) Für welchen Wert von t stehen die Vektoren zueinander senkrecht?
- c) Die Vektoren sollen einen Winkel von 75° einschliessen. Wie gross muss t sein?