2. Das Skalarprodukt

2.1. Definition und Berechnung des Skalarprodukts

1. **Definition**

   Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
   Dann ist das skalare Produkt dieser beiden Vektoren definiert durch

   ....

   ....

2. **Eigenschaften**

   a) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ....

   ....

   b) Wenn die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen, ...

   ....

   ....

   ....

   c) Für parallele Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: ....

   ....

   d) Speziell gilt: ....

   e) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ....

3. **Einheitsvektoren**

4. **Bemerkung**

   Nun stellt sich die entscheidende Frage, wie man das Skalarprodukt berechnet, wenn die beiden Vektoren in Komponentenschreibweise gegeben sind.

   Was ergibt also beispielsweise $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

5. **Herleitung**

Wir machen folgende Vorbereitungsüberlegung:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist mit den Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen ausgedrückt:

....

Damit können wir die Formel für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ herleiten.

6. **Formel**

Wir erhalten die wichtige Formel ....

....

7. **Beispiele zwei- und dreidimensional**

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 2b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7a \\ -3b \\ 9a \end{pmatrix} =$

Übung

$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = ?$

Folgerungen?

2.2. Anwendungen des Skalarprodukts

1. **Senkrecht stehende Vektoren**

   a) Weise nach, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zueinander senkrecht stehen.

   b) Bestimme t so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 8 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

2. **Winkel zwischen zwei Vektoren**

   a) Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 8 \end{pmatrix}$ sollen einen Winkel von $\alpha = 60°$ einschliessen. Wie gross ist t?

3. **Winkelberechnung im Dreieck**

   Wie gross ist der Winkel α des Dreiecks ABC?
   $A(\,2\,|\,4\,|\,1\,)$, $B(\,1\,|\,0\,|\,8\,)$, $C(\,3\,|\,2\,|-1\,)$.

4. **Anwendung**

   Der Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix}$ soll zu den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.
   Bestimme p und q.

5. **Anwendung**

   Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Zerlege den Vektor $\vec{b}$ in zwei Vektoren, wobei der erste parallel und der zweite senkrecht zum Vektor $\vec{a}$ stehen sollen.

Übung

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Setze $t = 5$ und berechne den Winkel zwischen den Vektoren.

b) Für welchen Wert von t stehen die Vektoren zueinander senkrecht?

c) Die Vektoren sollen einen Winkel von $75°$ einschliessen. Wie gross muss t sein?