Gesamtrepetition Vektorgeometrie

Aufgaben aus früheren Prüfungen

1. **Dreieck**

   Vom Dreieck $A\ (1|-1|1)\quad B\ (2|0|-4)\quad C\ (5|3|8)$ berechne man

   a) den Winkel α,

   b) die Fläche F und

   c) die (Länge der) Höhe h_a

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 125.26^\circ}}$$

b) $F = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \underline{\underline{\frac{27}{2}\sqrt{2}}}$

c) $F = \frac{1}{2} a \cdot h_a \Rightarrow \frac{27}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC}\| \cdot h_a$

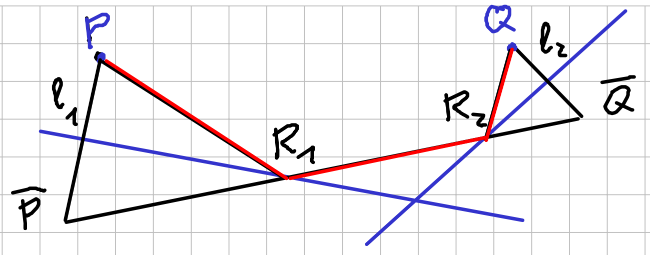
$$\Rightarrow \underline{\underline{h_a = 3}}$$

2. **Spiegelung**

Ein vom Punkt $P\ (0\,|-2\,|\,8\,)$ ausgehender Lichtstrahl wird zunächst an der Ebene $4x - 3y - z - 24 = 0$, dann an der Ebene $x + 3z - 6 = 0$ reflektiert und geht schliesslich durch den Punkt $Q\ (-2\,|\,4\,|\,6\,)$.

a) Bestimme die Koordinaten der beiden Reflexionspunkte.

b) Berechne die Länge des Lichtstrahls (von P über die beiden Reflexionspunkte bis nach Q gerechnet.)



a) P an $\mathcal{E}_1$ spiegeln $\quad \ell_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\ell_1 \cap \mathcal{E}_1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow t = 2$ für $\overline{P}\,(8\,|-8\,|\,6)$

Q an $\mathcal{E}_2$ spiegeln $\quad \ell_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\ell_2 \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow t = -2$ für $\overline{Q}\,(-4\,|\,4\,|\,0)$

$\overline{P}\overline{Q}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cancel{\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overline{P}\overline{Q} \cap \mathcal{E}_1 \Rightarrow \underline{\underline{R_1\,(4\,|-4\,|\,4)}}$

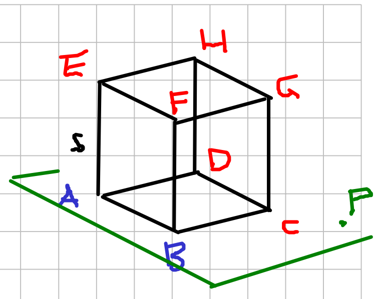
$\overline{P}\overline{Q} \cap \mathcal{E}_2 \Rightarrow \underline{\underline{R_2\,(0\,|\,0\,|\,2)}}$

b) Länge $= \|\overrightarrow{\overline{P}\overline{Q}}\| = \underline{\underline{18}}$

3. **Würfel**

Von einem Würfel kennt man die Ecken $A\ (2|-3|1)$ und $B\ (4|0|7)$. Von der Ebene der Würfelgrundfläche $ABCD$ kennt man noch den Punkt $P\ (0|0|-1)$. Bestimme die Koordinaten aller Würfeleckpunkte.

$$s = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 7$$



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_E = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \ldots = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 21 \\ -42 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$$

$C\ (7|-6|9)$

$D\ (5|-9|3)$

$E\ (-4|-5|4)$

$F\ (-2|-2|10)$

$G\ (1|-8|12)$

$H\ (-1|-11|6)$

(Es sind 4 Würfel möglich)

4. **Gerade und Kugel**
Gegeben ist die Gerade g: $(5\,|\,2\,|\,10)$ $(7\,|\,-2\,|\,10)$
und die Kugel $k: x^2+y^2+z^2-6x+8y-12z-20=0$.

a) In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich g und k?

b) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in einem der beiden Schnittpunkte.

a) $k: (x-3)^2+(y+4)^2+(z-6)^2 = 81$

$M(3|-4|6)$, $r = 9$

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \cap k$: $S_1(10|-8|10)$ $S_2(4|4|10)$

$\overrightarrow{MS_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{MS_1}\cdot\vec{r}_g}{\|\overrightarrow{MS_1}\|\cdot\|\vec{r}_g\|} \Rightarrow \alpha = 41.81^\circ$

$\Rightarrow \underline{\underline{\beta = 48.19^\circ}}$

b) $\overrightarrow{MS_1} = \vec{n}_E \Rightarrow \underline{\underline{7x-4y+4z-142=0}}$

In S_2 : $\underline{\underline{x+8y+4z-76=0}}$

5. **Inkugel**

Gegeben sind die Eckpunkte $A\ (3|6|-2)$, $B\ (7|10|0)$ und $C\ (9|6|4)$ der Bodenfläche eines Würfels.

a) Weise nach, dass die Daten stimmen, d.h. dass A, B und C wirklich Eckpunkte eines Würfels sind und bestimme die Koordinaten von D, E und F.

b) Bestimme die Gleichung der Inkugel. (Das ist die grösste Kugel, die in den Würfel hineinpasst, wenn man den Würfel als Schachtel denkt.)

a) $\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\right\| = 6$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\right\| = 6$

und $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \beta = 90°$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \underline{\underline{D(5|2|2)}}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}24\\-12\\-24\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$

$E(-1|8|2)$, $F(3|12|4)$ oder $E(7|4|-6)$, $F(11|8|-4)$

b) M ist Mitte von CE , $r = 3 = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$

$M(4|7|3)$ oder $M(8|5|-1)$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 = 9$

oder

$(x-8)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9$

6. **Zwei Kugeln**

Gegeben sind die Kugeln $k_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4z - 36 = 0$ und $k_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + z + 3 = 0$.

a) Bestimme die Mittelpunkte und Radien der beiden Kugeln.

b) Weise nach, dass sich die Kugeln berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene (im Berührpunkt).

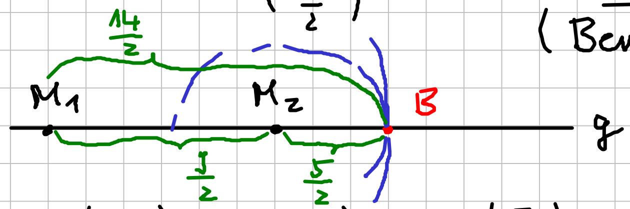
a) $k_1 : x^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 49$

$k_2 : (x-3)^2 + y^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$

$\underline{\underline{M_1(0|-3|-2)\ r_1 = 7,\ M_2(3|0|-\frac{1}{2}),\ r_2 = \frac{5}{2}}}$

b) $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\| = \frac{9}{2} = \underline{\underline{r_1 - r_2}}$

(Berührung von innen)



$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$M_1\ (t = 0),\ M_2\ (t = 1) \Rightarrow B\ (t = \frac{14}{9})$

$\underline{\underline{B\left(\frac{14}{3} \middle| \frac{5}{3} \middle| \frac{1}{3}\right)}}$

$\underline{\underline{E : 2x + 2y + z - 13 = 0}}$

7. **Drei Ebenen**

Gegeben sind drei Ebenen: $\varepsilon_1 : 3x + y - 2z + 5 = 0$, $\varepsilon_2 : x - y + 6z + 31 = 0$, $\varepsilon_3 . 2x + 3y + c \cdot z + d = 0$.

a) Bestimme die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen ε_1 und ε_2.

b) Die Ebene ε_3 soll auch durch dieselbe Schnittgerade gehen. Bestimme c und d.

a) $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ +6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{r}_s$

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap z = 0 \Rightarrow x = -9 \, , \, y = 22$

$$\underline{\underline{s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 64.306^\circ}}$$

b) $\vec{n}_3 \cdot \vec{r}_s = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = -13}}$

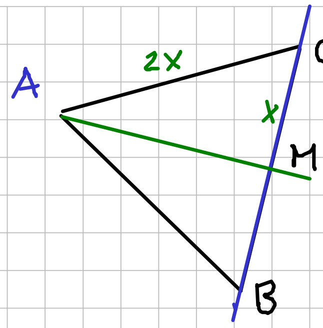
$2x + 3y - 13z + d = 0$ denn $(-9 \mid 22 \mid 0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{d = -48}}$

8. **Gleichseitiges Dreieck**

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man $A\,(0\,|\,7\,|\,9\,)$ und weiss, dass B und C auf der Geraden g: $(\,4\,|\,5\,|\,-13\,)$ $(\,5\,|\,9\,|\,-14\,)$ liegen.
Bestimme die Koordinaten von B und C.

M ist Lotfusspunkt von A auf g



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalebene $x + 4y - z - 19 = 0$

$$g \cap \varepsilon \Rightarrow M(3\,|\,1\,|\,-12)$$

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -21 \end{pmatrix} \right\| = 9\sqrt{6} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 9\sqrt{2}$$

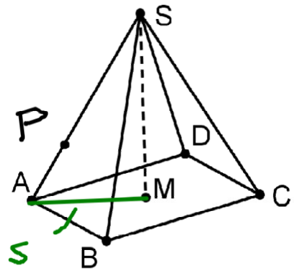
$\vec{r}_g$ auf Länge x bringen und in M anhängen

$$\|\vec{r}_g\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = 3 \cdot \vec{r}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{MC}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B(6\,|\,13\,|\,-15)\,,\ C(0\,|\,-11\,|\,-9)}}$$

9. **Pyramide**

Von einer geraden quadratischen Pyramide (siehe die Figur: $ABCD$ ist ein Quadrat) kennt man die Spitze $S\ (6\,|\,13\,|\,9)$, das Zentrum der Bodenfläche $M\ (0\,|\,1\,|\,-3)$ und den Punkt $P\ (2\,|\,3\,|\,3)$ auf der Kante AS. Bestimme die Koordinaten von A, B, C und D.
Hinweis: Bestimme die Gleichung der Ebene $ABCD$.



a) $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varepsilon : x + 2y + 2z + 4 = 0$

b) $SP : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \cap \varepsilon$

$\Rightarrow \underline{\underline{A\,(0\,|\,-2\,|\,0)}}$

c) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \underline{\underline{C\,(0\,|\,4\,|\,-6)}}$

$s = \|\overrightarrow{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{2}$

d) $\vec{n}_\varepsilon \times \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat Länge $9\sqrt{2}$

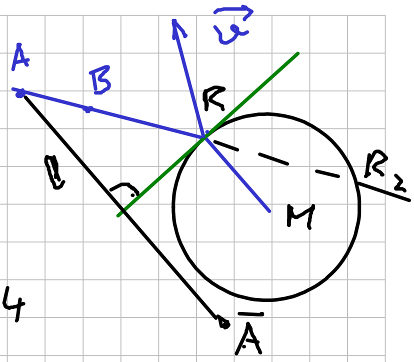
$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\overrightarrow{MD}$

$\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{B\,(-4\,|\,2\,|\,-2)}} \\ \underline{\underline{D\,(4\,|\,0\,|\,-4)}} \end{array}\right\}$ (vertauschbar)

10. **Reflexion**

Gegeben sind die Punkte $A\ (4\,|-10\,|\,8\,)$ und $B\ (5\,|-6\,|\,7\,)$
sowie die Kugel k: $M\ (6\,|\,10\,|\,0\,)$, $r = 6$.
Ein von A ausgehender Lichtstrahl geht zunächst durch B und trifft dann auf die Kugel, wo er reflektiert wird.
Bestimme den reflektierten Strahl (Parametergleichung).
Hinweis: Eine Reflexion an der Kugel ist gleichbedeutend mit der Reflexion an der Tangentialebene im betreffenden Kugelpunkt.

$$k:\ (x-6)^2+(y-10)^2+z^2=36$$



$$g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap k \Rightarrow \underline{\underline{R\ (8\,|\,6\,|\,4)}} \text{ mit } t=4$$

$$(R_2 \text{ hat } t=6)$$

$$\overrightarrow{MR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}_\varepsilon \Rightarrow \varepsilon:\ x-2y+2z-4=0$$

$$A \text{ an } \varepsilon \text{ spiegeln}:\quad \ell:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\ell \cap \varepsilon \Rightarrow t=-4 \Rightarrow t=-8 \text{ für } \bar{A}\ (-4\,|\,6\,|-8)$$

$$\overrightarrow{\bar{A}R} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

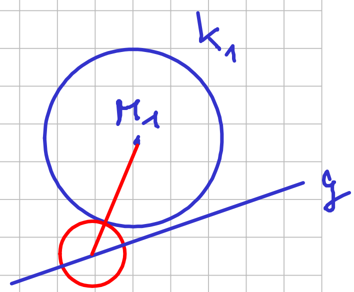
11. **Berührende Kugeln**

Von einer Kugel k_1 kennt man das Zentrum $M_1\ (2\,|\,3\,|\,7)$ und den Radius $r_1 = 6$.
Weiter ist die Gerade g: $(9\,|\,6\,|\,4)$ $(10\,|\,6\,|\,3)$ gegeben.
Gesucht ist eine Kugel k_2 mit Radius $r_2 = 1$, welche das Zentrum M_2 auf g hat und welche k_1 berührt.

a) Bestimme *eine* Lösung für M_2 und dazu den Berührpunkt von k_1 mit k_2.

b) Wie viele Lösungen solcher Kugeln k_2 gibt es? Begründe!

a) $r_1 + r_2 = 7$, d.h. suche Punkt auf g mit Abstand 7 von M,
<u>oder</u> lege eine Kugel k_3 mit Zentrum M_1, $r = 7$ und $k_3 \cap g$.



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+t \\ 6 \\ 4-t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 9+t \\ 6 \\ 4-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = 7 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 & M_2(8|6|5) \\ t_2 = -9 & M_2(0|6|13) \end{cases}$$

<u>oder</u>

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 49 \cap g$$

b) 2 Lösungen von aussen, 2 von innen

$r_1 - r_2 = 5$

z.B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-7)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} t_3 = -3 \\ t_4 = -7 \end{cases}$

$\Rightarrow$ <u>4 Lösungen</u>

Berührpunkte:

$$M_1 + \frac{6}{7}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) \Rightarrow \begin{cases} B\left(\frac{50}{7} \middle| \frac{39}{7} \middle| \frac{37}{7}\right) \\ B\left(\frac{2}{7} \middle| \frac{39}{7} \middle| \frac{85}{7}\right) \end{cases}$$

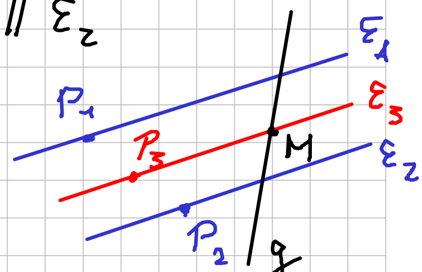
12. **Zwei Ebenen und eine Kugel**

Gegeben sind zwei Ebenen: $\varepsilon_1 : 2x - y + 2z + 3 = 0$ und $\varepsilon_2 : 2x - y + 2z - 33 = 0$ sowie die Gerade g: $(5|1|6)$ $(4|0|8)$.

a) Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen.

b) Gesucht ist die Kugel k, welche ihr Zentrum auf g hat und beide Ebenen berührt. Bestimme die Kugelgleichung sowie die Koordinaten der beiden Berührpunkte.

a) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}_2 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



b) Mittelparallelebene

$P_1(0|3|0)$, $P_2(0|-33|0)$

$\Rightarrow P_3(0|-15|0)$

$\Rightarrow \varepsilon_3 : 2x - y + 2z - 15 = 0 \quad \cap \; g$

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M(7|3|2)}}$

Lot von M auf ε_1 und ε_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\ell \cap \varepsilon_1 \Rightarrow \underline{\underline{B_1(3|5|-2)}}$

$\ell \cap \varepsilon_2 \Rightarrow \underline{\underline{B_2(11|1|6)}}$, $r = \|\overrightarrow{MB_1}\| = 6$

$k: \underline{\underline{(x-7)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 36}}$

3. **Würfel**

Von einem Würfel kennt man die Ecken $A\ (2|-3|1)$ und $B\ (4|0|7)$. Von der Ebene der Würfelgrundfläche $ABCD$ kennt man noch den Punkt $P\ (0|0|-1)$. Bestimme die Koordinaten aller Würfeleckpunkte.

$c:=b+ad$	$[7\ \ -6\ \ 9]$
$d:=a+ad$	$[5\ \ -9\ \ 3]$
$e:=a-ae$	$[-4\ \ -5\ \ 4]$
$f:=b-ae$	$[-2\ \ -2\ \ 10]$
$g:=c-ae$	$[1\ \ -8\ \ 12]$
$h:=d-ae$	$[-1\ \ -11\ \ 6]$
$c:=b-ad$	$[1\ \ 6\ \ 5]$
$d:=a-ad$	$[-1\ \ 3\ \ -1]$
$e:=a-ae$	$[-4\ \ -5\ \ 4]$
$f:=b-ae$	$[-2\ \ -2\ \ 10]$
$g:=c-ae$	$[-5\ \ 4\ \ 8]$
$h:=d-ae$	$[-7\ \ 1\ \ 2]$

$c:=b+ad$	$[7\ \ -6\ \ 9]$
$d:=a+ad$	$[5\ \ -9\ \ 3]$
$e:=a+ae$	$[8\ \ -1\ \ -2]$
$f:=b+ae$	$[10\ \ 2\ \ 4]$
$g:=c+ae$	$[13\ \ -4\ \ 6]$
$h:=d+ae$	$[11\ \ -7\ \ 0]$
$c:=b-ad$	$[1\ \ 6\ \ 5]$
$d:=a-ad$	$[-1\ \ 3\ \ -1]$
$e:=a+ae$	$[8\ \ -1\ \ -2]$
$f:=b+ae$	$[10\ \ 2\ \ 4]$
$g:=c+ae$	$[7\ \ 8\ \ 2]$
$h:=d+ae$	$[5\ \ 5\ \ -4]$