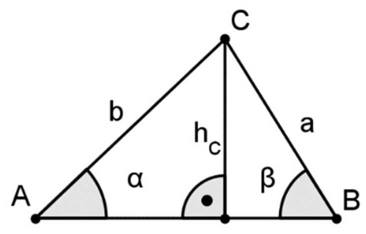
4. Berechnen am beliebigen Dreieck

4.1. Der Sinus-Satz

1) Beispiel
Von einem Dreieck kennt man die Seiten $a = 4$ cm, $b = 5$ cm und den Winkel $\alpha = 40°$. Berechne den Winkel β.

2) Herleitung des Sinus-Satzes
Wir lösen diese Aufgabe allgemein.



....

....

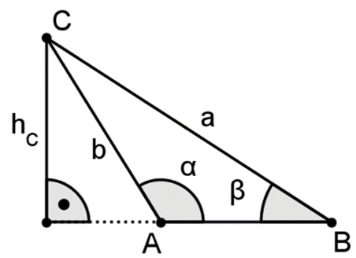
3) Satz

....

....

....

4) Überlegung
Stimmt der Sinus-Satz auch dann, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist?



....

....

5) Übungen
a) Von einem Dreieck kennt man $a = 5.43$ cm, $\alpha = 44°$ und $\gamma = 67°$. Berechne c.
b) Von einem Dreieck kennt man $a = 5.43$ cm, $c = 8.31$ cm und $\gamma = 67°$. Berechne α.

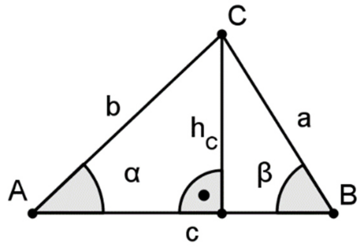
---

6) Freiwillige Übung
Von einem Dreieck kennt man alle Winkel: 45°, 55° und 80°. Weiter kennt man die längste Seite: 8 cm.
Wie lang sind die anderen Seiten?

4.2. Der Cosinus-Satz

1) Beispiel und Herleitung

Von einem Dreieck kennt man die Seiten c = 4 cm, b = 5 cm und den Winkel $\alpha = 70°$.
Berechne die Seite a.
Wir lösen die Aufgabe direkt allgemein.



....

....

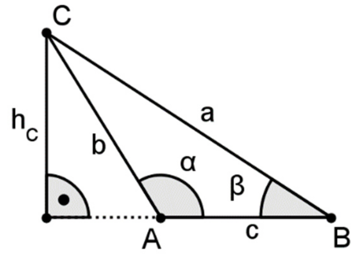
....

....

....

2) Zweiter Teil der Herleitung

Was passiert, wenn der Winkel $\alpha > 90°$ ist?



....

....

....

....

....

3) Satz

....

....

....

4) Bemerkung

Man überlege sich, was der Cosinus-Satz besagt, wenn $\gamma = 90°$ ist. ....

5) Satz

....

....

---

6) Freiwillige Übung

Von einem Dreieck kennt man a = 4 cm, b = 5 cm, $\gamma = 108°$. Berechne c.

4.3. Grundaufgaben

1) Vorbemerkung
Von einem Dreieck sind 3 "Aussenstück" (Seiten oder Winkel) gegeben. Dann sind die anderen drei Stücke berechenbar. Es sind einige Fälle zu unterscheiden:

A) .... B) .... C) ....

D) .... E) .... F) ....

2) Bemerkung
Wann benötigt man für die Berechnungen den Sinus-Satz, wann den Cosinus-Satz?

....

....

....

3) Grundaufgabe A
Gegeben sind alle Seiten eines Dreiecks.

Lösungsstrategie: ....

....

4) Beispiele

a) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 9$ cm

....

b) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm

....

....

5) Grundaufgabe B
Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

Lösungsstrategien: ....

....

....

6) Beispiel
$a = 1$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 60°$

....

....

....

7) Bemerkung
Wann muss man bei Berechnungen mit dem Sinus-Satz oder Cosinus-Satz aufpassen?

....

....

....

....

8) Grundaufgaben C und D
Gegeben sind eine Seite des Dreiecks und zwei Winkel.

Lösungsstrategie: ....

....

9) Beispiel
$c = 2$ cm, $\alpha = 40°$, $\beta = 65°$

....

....

....

10) Grundaufgabe E
Gegeben sind zwei Seiten und ein Winkel (aber nicht der eingeschlossene).

Lösungsstrategie: ....

....

....

11) Beispiele

a) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 40°$

....

....

....

b) $a = 7$ cm, $b = 10$ cm, $\alpha = 38°$

....

....

....

....

c) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm, $\alpha = 30°$

....

....

d) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 36°$

....

....

---

12) Freiwillige Übung
Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks.

a) $a = 34.5$ cm, $\alpha = 55.5°$, $\beta = 66.6°$
b) $a = 4$ m, $b = 7$ m, $c = 9$ m
c) $a = 8.76$ cm, $c = 5.43$ cm, $\beta = 66.6°$

4.4. Anwendungen

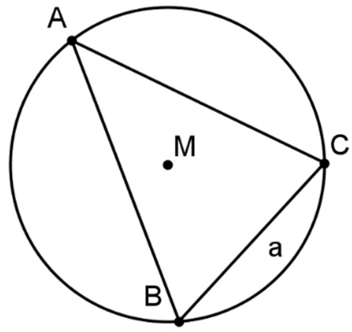
1) Drachenviereck
Von einem Drachen kennt man alle Seiten: 7 cm, 7 cm, 12 cm, 12 cm und eine (welche?!) Diagonale 15 cm. Berechne alle Innenwinkel.

2) Dreieck
Von einem Dreieck kennt man die Seite c = 9 cm, die Höhe h_b = 5 cm sowie den Winkel γ = 70°. Berechne die Fläche dieses Dreiecks.

3) Zwei Kreise
Die Zentren zweier Kreise haben einen Abstand von 12 cm. Die zur gemeinsamen Sehne gehörenden Zentriwinkel betragen 72° resp. 130°. Berechne die Kreisradien.

4) Theorie-Bemerkung
Welche Bedeutung hat das konstante Verhältnis

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \ ?$$



....

....

5) Dreieck
Von einem Dreieck kennt man die Seite a = 6 cm, den Winkel γ = 70° und den Umkreisradius r = 4. Berechne die anderen Seiten dieses Dreiecks.

---

6) Freiwillige Übung
Von einem Sehnenviereck (siehe die Bezeichnungen in der Figur) kennt man
a = 5, c = 4.3, e = 5.4 und β = 94°.
Bestimme die fehlenden Seiten und Winkel.