Trigonometrie

1. Berechnung im rechtwinkligen Dreieck

1.1. Begriffe

1. **Was heisst Trigonometrie?**

   Das Wort kommt aus dem griechischen: *tri* heisst drei, *gon* kommt von gonios und heisst Winkel. Die Rede ist also von einem Dreiwinkel. Auf deutsch sagt man Dreieck, aber in vielen anderen Sprachen ist das Dreieck als Dreiwinkel übersetzt, so beispielsweise französisch und englisch triangle und italienisch triangolo.
   Trigonometrie heisst also nichts anderes als Dreiecksmessung oder Dreiecksberechnung und es wird darum gehen, aus gegebenen Stücken eines Dreiecks die fehlenden Stücke zu berechnen.
   Im ersten Kapitel ist das betrachtete Dreieck rechtwinklig. Wie man ein nicht rechtwinkliges Dreieck berechnet, werden wir in einem späteren Kapitel sehen.

2. **Bezeichnungen**

   Im rechtwinkligen Dreieck gibt es die Begriffe:

   Katheten: ....

   Hypotenuse: ....

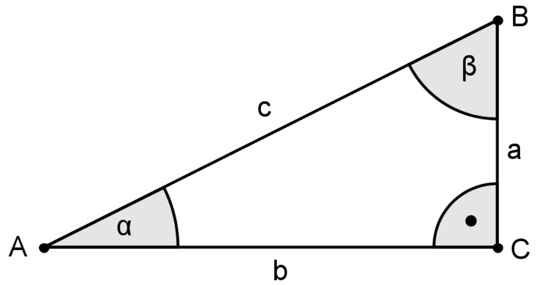
   Anliegende Kathete oder Ankathete: ....

   ....

   Gegenüberliegende Kathete oder Gegenkathete: ....

   ....

   Und selbstverständlich gilt Pythagoras: ....



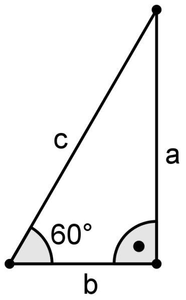
3. **Vergleiche Konstruktion und Berechnung**

   Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 7.5\,\text{cm}$ können wir sicher konstruieren. Wir können aus der Konstruktion die Hypotenuse und die Winkel α und β messen (ablesen). Die Hypotenuse können wir auch berechnen, hingegen die Winkel (noch) nicht. Davon handelt Trigonometrie.

1.2. Die trigonometrischen Funktionen

1. **Beispiel**

   Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Winkel $\alpha = 60°$ und die Hypotenuse $c = 6\,\text{cm}$. Bestimme die anderen Seiten.

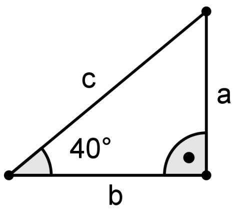
   Lösung: Die Figur zeigt die Situation. Es ist sehr entscheidend, dass der Winkel α genau $60°$ misst, denn dann entsteht die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks. (Wenn du das Dreieck an der Seite a spiegelst, dann bekommst du die andere Hälfte dazu.)
   Somit ergibt sich sofort, dass $b = 3\,\text{cm}$ sein muss.
   a kann man dann mit Pythagoras berechnen.
   Rechne selber nach und kontrolliere: $a = 5.196\,\text{cm}$.

2. **Bemerkung**

   Im Folgenden werden wir den Winkel α verändern. Das verändert die Aufgabe wesentlich, denn für $\alpha = 45°$ oder $\alpha = 30°$ wäre sie noch zu lösen (dann hat man ein Geo-Dreieck oder erneut ein halbes gleichseitiges Dreieck), aber für andere Winkel wird die Aufgabe zumindest im Moment unlösbar, ausser du bekommst noch ein paar Informationen dazu.

3. **Beispiel**

   Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Winkel $\alpha = 40°$ und die Hypotenuse $c = 6\,\text{cm}$. Bestimme die anderen Seiten.

   Auch wenn die Aufgabe fast gleich aussieht wie die erste, benötigst du eine neue Information: Man definiert den Sinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck als das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse. Konkret heisst das: der Sinus des Winkels α ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete a zur Hypotenuse c. Und nochmals dasselbe in Zeichen: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.
   Auf dem Taschenrechner findest du dazu eine Taste, welche normalerweise mit **sin** angeschrieben ist. Kontrolliere, ob du $\sin(40°) = 0.6428$ erhältst.
   Lösung: Wenn du die Definition des Sinus kennst, dann ist es nicht mehr schwierig, aus der Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ die fehlende Grösse a herauszubekommen.
   Löse nach a auf: das ergibt $a = 6 \cdot \sin(40°)$ und dann $a = 3.857\,\text{cm}$. Die fehlende Seite b kannst du dann mit Pythagoras rechnen. Rechne selber nach: $b = 4.596\,\text{cm}$.

4. **Beispiel**

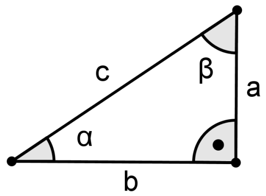
   Von einem Dreieck kennt man die Kathete $a = 5\,\text{cm}$ und die Hypotenuse $c = 6\,\text{cm}$. Wie gross ist α?

   Lösung: Aus der Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ erhalten wir sofort $\sin(\alpha) = \frac{5}{6}$. D.h. wir suchen denjenigen Winkel, dessen Sinus-Wert $\frac{5}{6}$ beträgt. Dazu dient uns die Umkehrfunktion des Sinus. Mathematisch spricht man vom Arcus-Sinus und bezeichnet die Funktion mit $\arcsin(x)$. (Arcus kommt aus dem Latein und heisst Bogen. Wir suchen also den Bogen resp. Winkel mit gegebenem Sinus-Wert.)

   Auf dem Taschenrechner lautet die Taste je nach Modell $\sin^{-1}(x)$ oder **INV SIN** oder **2nd SIN** oder anders. Kontrolliere selber, ob du $\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) = 56.443°$ erhältst. Das ist der gesuchte Winkel α.

5. **Zusammenfassung**

   Bis hierher hast du eine der trigonometrischen Funktionen, nämlich die Sinus-Funktion, und ihre Umkehrung (nämlich die Arcus-Sinus-Funktion) kennen gelernt. Der Sinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis von gegenüberliegender Kathete zu Hypotenuse.



   Es gilt also $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ und logischerweise $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$.

   Umgekehrt ist $\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$ und entsprechend $\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$

6. **Taschenrechner-Bedienung**

   a) $\alpha = 25.5°$. $\sin(\alpha) =$ ....

   b) $\alpha = 67.8°$. $\sin(\alpha) =$ ....

   c) $\alpha = 84.3°$. $\sin(\alpha) =$ ....

   d) $\alpha = 1.38°$. $\sin(\alpha) =$ ....

   e) $\sin(\alpha) = 0.3$. Dann ist $\alpha =$ ....

   f) $\sin(\alpha) = 0.472$. Dann ist $\alpha =$ ....

   g) $\sin(\alpha) = 0.59$. Dann ist $\alpha =$ ....

   h) $\sin(\alpha) = 0.91$. Dann ist $\alpha =$ ....

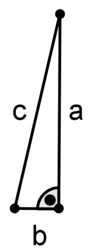
   i) $\sin(\alpha) = 0.03$. Dann ist $\alpha =$ ....

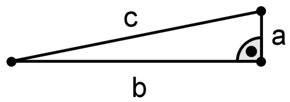
   Vergleiche deine Ergebnisse mit einer Mitschülerin oder einem Mitschüler.

7. **Bemerkungen**

Die nachfolgenden Bemerkungen zum Sinus sollen das Gelernte veranschaulichen und illustrieren. Lies den Text genau durch.

a) In der dritten Aufgabe solltest du als Ergebnis $\sin(84.3°) = 0.995$ erhalten. Das bedeutet, dass das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse 0.995 ist. Wer will, kann zur Anschauung den Sinus-Wert auch als %-Zahl auffassen. 0.995 sind 99.5%, d.h. wenn der Winkel 84.3° misst, dann ist die Länge der Gegenkathete 99.5% von der Länge der Hypotenuse. Die Kathete ist somit fast so lang wie die Hypotenuse. Das erstaunt nicht, denn der Winkel α ist relativ gross und so mit wird der Winkel β sehr klein. Die Figur links zeigt die Situation nicht ganz massstäblich.





b) Weiter solltest du in der letzten Aufgabe den Winkel $\alpha = 1.72°$ erhalten. Wieder anschaulich: der Sinus-Wert ist sehr klein, die Gegenkathete misst nur 3% der Hypotenuse. Dann muss logischerweise auch der Winkel klein sein. Die kleine Figur rechts zeigt die Situation nicht massstäblich.

c) Noch etwas Wichtiges: ein Sinus-Wert ist keine Länge, sondern eine Verhältniszahl. Ein Sinus-Wert entsteht aus der Division zweier Längen. Wenn man beispielsweise 4 cm durch 5 cm dividiert, erhält man 0.8 (ohne Dimension, also keine cm; und erst recht nicht irgendwelche Minuten oder kg).
Man sagt: der Sinus ist dimensionslos, oder: der Sinus hat Dimension 1.

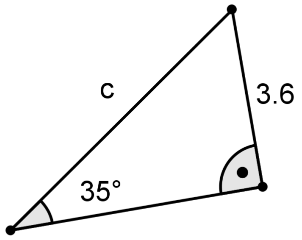
d) Übrigens merkst du vielleicht, dass ein Sinus-Wert sicher zwischen 0 und 1 liegen muss. Die Null kann nicht unterschritten werden, weil es sich um Längen handelt, die 1 kann nicht überschritten werden, weil die Kathete sicher kürzer ist als die Hypotenuse. Die untere Grenze Null gilt allerdings nur für den Moment, denn wir werden später die Definition des Sinus erweitern.

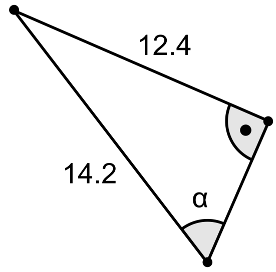
e) Nur in ganz wenigen Fällen erhält man für einen Sinus-Wert schön aufgehende Zahlen. Im Normalfall wirst du runden müssen. Aber runde bitte auf etwa 3 Nachkommastellen, sonst werden die Rundungseffekte schnell sehr gross.

f) Und zum Schluss: Den Ausdruck $\sin(\alpha)$ liest man *Sinus **von** α*, entsprechend ist $\arcsin(0.2)$ der *Arcus-Sinus **von** 0.2*. Im Klassenzimmer kamen schon Sprechweisen wie *Arcus-Sinus **mal** 0.2* vor. Das ist mathematisch sinnlos. Die Klammern sind Funktionsklammern, nicht Multiplikationsklammern.

8. **Übungen**

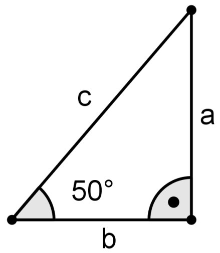
Wenn du den Text bis hierher genau durchgelesen und begriffen hast, dann solltest du die beiden folgenden Aufgaben problemlos lösen können.
Berechne (in der Figur links) die Seite c und (in der Figur rechts) α.





9. **Beispiel**

Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Hypotenuse $c = 8\,\text{cm}$ und den Winkel $\alpha = 50°$. Wie lang ist die Kathete b?



Lösung: Natürlich könntest du mit Hilfe des Sinus zuerst die Seite a rechnen und dann mit Pythagoras die Seite b bestimmen.
Es gibt aber einen direkten Weg: man definiert den Cosinus eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck als das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.
Konkret heisst das: der Cosinus des Winkels α ist das Verhältnis der anliegenden Kathete b zur Hypotenuse c. Und nochmals dasselbe in Zeichen: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$.
Aus der obigen Gleichung erhält man sofort $b = c \cdot \cos(\alpha)$ und kann nur noch im Taschenrechner einsetzen.
Rechne selber nach: $b = 5.142\,\text{cm}$.

10. **Beispiel**

Im rechtwinkligen Dreieck kennt man die Kathete $a = 3\,\text{cm}$ und die Hypotenuse $c = 9\,\text{cm}$. Wie gross ist β?
Lösung: Das Verhältnis von anliegender Kathete zu Hypotenuse gilt sinngemäss natürlich auch für den Winkel β.
Aus der Gleichung $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ erhalten wir sofort $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. Wir benötigen somit die Umkehrfunktion des Cosinus. Naheliegenderweise ist das die Arcus-Cosinus-Funktion.
Also ist β der Arcus-Cosinus von $\frac{1}{3}$. In Zeichen: $\beta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
Kontrolliere: $\beta = 70.53°$.

11. **Zusammenfassung**

Im rechtwinkligen Dreieck gilt $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ und logischerweise $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$.
Umgekehrt ist $\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$ und entsprechend $\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$

12. **Übungen**

Überlege dir bei jeder Aufgabe, ob du besser mit dem Sinus oder dem Cosinus bzw. den Umkehrfunktionen arcsin oder arccos rechnest. Für alle Aufgaben ist c die Hypotenuse. Versuche, alle Aufgaben in einem Schritt zu lösen.

a) Gegeben sind $a = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$. Berechne α.

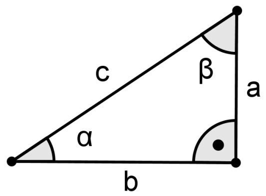
b) Gegeben sind $a = 4\,\text{cm}$ und $\beta = 20°$. Berechne c.

c) Gegeben sind $b = 7\,\text{cm}$ und $\beta = 35°$. Berechne c.

Vergleiche die Resultate mit denjenigen einer Mitschülerin oder einem Mitschüler.

13. **Beispiel**

Gegeben sind die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks: $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$. Wie gross ist der Winkel α?



Natürlich könntest du diese Aufgabe mit den bereits bekannten Funktionen lösen, indem du zuerst mit Pythagoras die Hypotenuse rechnest und dann mit einem Arcus-Sinus oder Arcus-Cosinus weiter arbeitest.
Es gibt aber auch hier wieder einen direkten Weg und so kommen wir zur letzten der drei trigonometrischen Funktionen. Vielleicht hast du schon gemerkt, dass du auf dem Taschenrechner neben der Taste für den Sinus und der Taste für den Cosinus noch eine dritte Taste hast, die mit tan angeschrieben ist.
Man definiert den Tangens eines Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck als das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden Kathete. Konkret heisst das: der Tangens des Winkels α ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete a zur anliegenden Kathete b. Und nochmals dasselbe in Zeichen: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$.
Jetzt sollte die Lösung nicht mehr schwierig sein: Aus dem Verhältnis $a : b = 3 : 4$ hat man sofort $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$. Also ist $\alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.
Zur Kontrolle das Ergebnis, wenn du im Taschenrechner eingetippt hast: $\alpha = 36.87°$.

14. **Beispiel**

Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c kennt man den Winkel $\alpha = 60°$ und die Kathete $a = 6\,\text{cm}$. Wie gross ist b?
Lösung: Aus $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ erhältst du $b = \frac{a}{\tan(\alpha)}$ und somit $b = 3.464\,\text{cm}$.
Rechne selber nach.

15. **Zusammenfassung**

Im rechtwinkligen Dreieck gilt $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ und logischerweise $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Umgekehrt ist $\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ und entsprechend $\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

16. **Allgemeine Formulierung**

Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen

$$\sin(Winkel) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$$

$$\cos(Winkel) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

$$\tan(Winkel) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

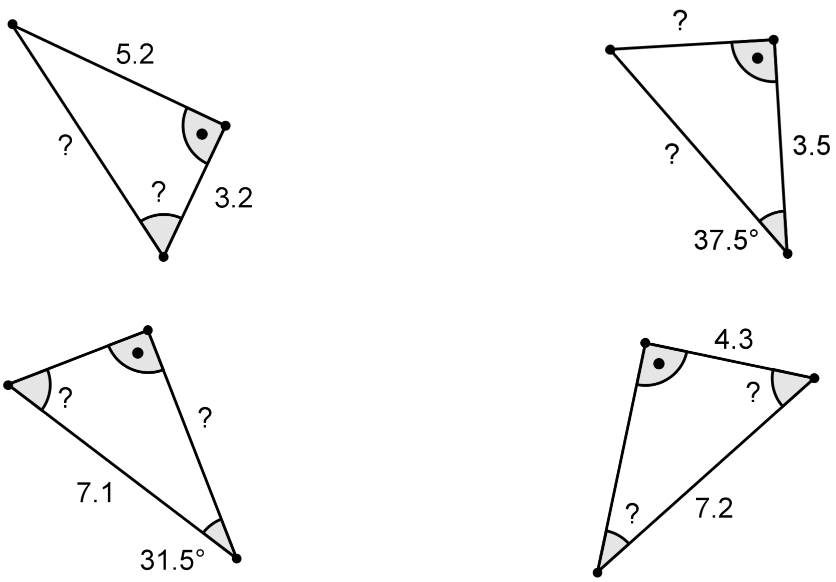
$$Winkel = \arcsin\left(\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}\right)$$

$$Winkel = \arccos\left(\frac{Ankathete}{Hypotenuse}\right)$$

$$Winkel = \arctan\left(\frac{Gegenkathete}{Ankathete}\right)$$

17. **Übungen**

Berechne aus den Figuren jeweils die fehlenden Angaben. Damit es nicht allzu einfach wird, sind diesmal die Seiten nicht mehr mit a, b und c bezeichnet. Versuche für jede einzelne Unbekannte möglichst immer in einem einzigen Schritt aus den gegebenen Grössen auf die gesuchten Längen und Winkel zu kommen.



18. **Taschenrechner-Bedienung**

a) $\arctan(0.345) = ?$

b) $\cos(16.32°) = ?$

c) $\arcsin(1.032) = ?$

19. **Überlegungsaufgabe**

Kann der Tangens eines Winkels grösser werden als 1?
Was kann man dann über den Winkel aussagen?
Der Tangens hat übrigens eine ganz wichtige, praktische Bedeutung. Findest du sie?

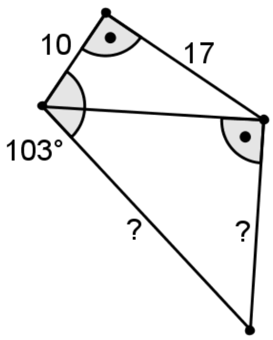
Übungen

Die folgenden Beispiele sind für diejenigen gedacht, die das Leitprogramm rasch durchgearbeitet haben.

a) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Katheten 3.24 cm und 4.52 cm. Berechne die Winkel.

b) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Hypotenuse 6.13 cm und einen Winkel 73.5°. Wie lang sind die Katheten?

c) Berechne die fehlenden Angaben in der Figur.

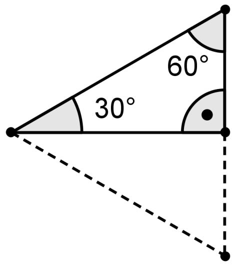


1.3. Ausgewählte Winkel

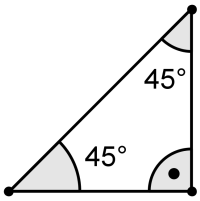
1. **Bemerkung**

   Die trigonometrischen Funktionswerte sind nur in ganz wenigen Fällen schön aufgehende Zahlen. Diese Werte bestimmen wir in diesem Teilkapitel.

2. 30° **und** 60°



3. 45°



4. $0°$ **und** $90°$

   In diesen Fällen gibt es keine Dreiecke mehr.

5. **Zusammenstellung**