

2. Statistik mit zwei abhängigen Variablen

2.1. Der Korrelationskoeffizient

1. Beispiele

Es gibt relativ viele Beispiele von Abhängigkeiten zwischen zwei Messgrößen.

- a) Grössere Menschen sind tendenziell schwerer.
- b) Die Jahres-Niederschlagsmenge einer Messstation ist abhängig von der Höhe (über Meeresspiegel).
- c) Die durchschnittliche Lebenserwartung von Menschen ist abhängig vom Bildungsniveau.
- d) usw.

In diesem Kapitel geht es darum, den Zusammenhang zwischen den jeweiligen Variablen zu beschreiben und zu berechnen. Dabei beschränken wir uns auf die Fälle, bei denen die Messgrößen in Zahlwerten vorliegen. Das dritte Beispiel in der obigen Aufzählung lassen wir also unbetrachtet.

2. Musterbeispiel

Wir betrachten zwei abhängige Messreihen:

$$\begin{array}{l} x_i \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \\ y_i \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$



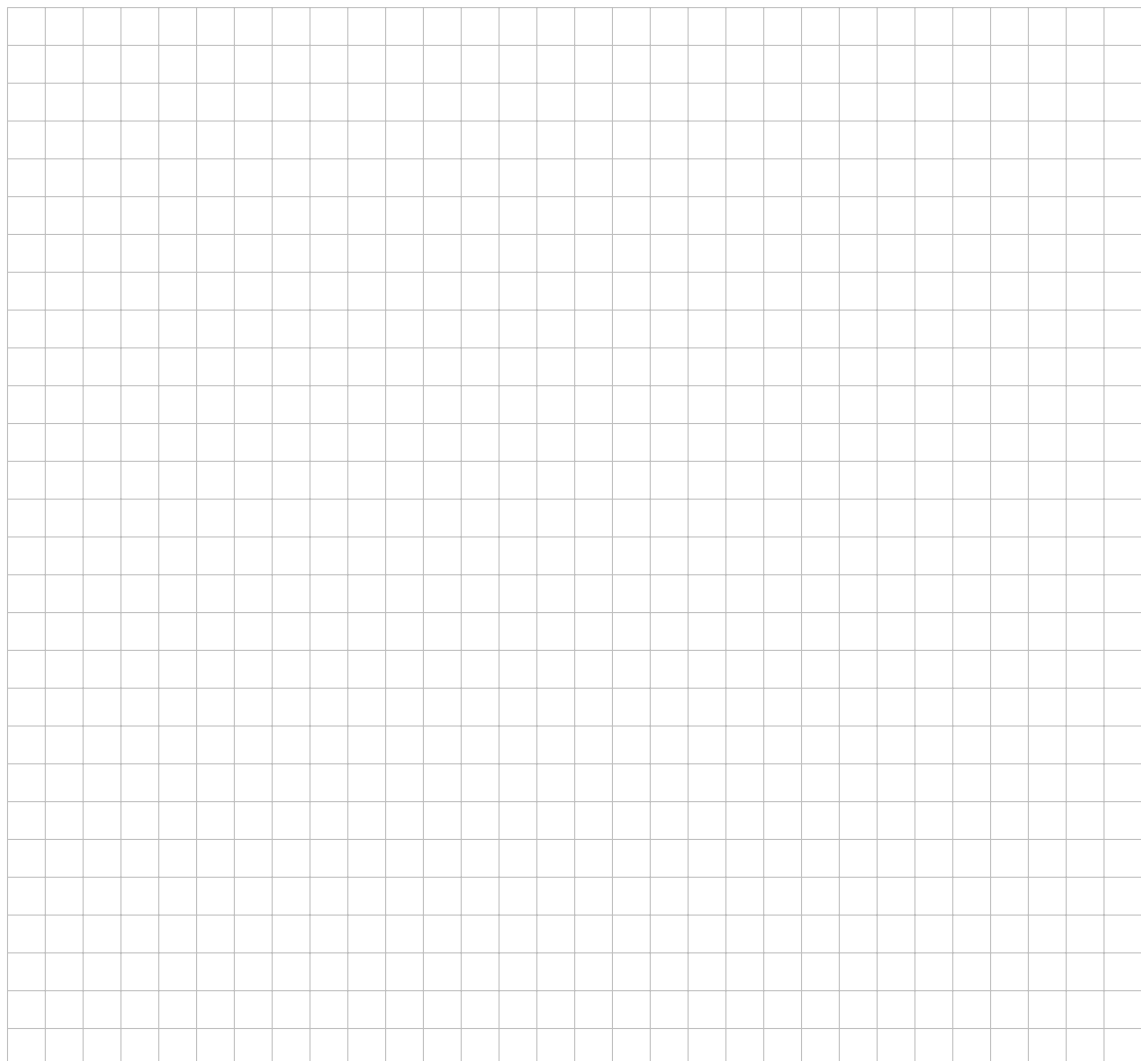
3. **Definition**

.....
.....
.....
.....
.....

4. **Was beschreibt der Korrelationskoeffizient?**

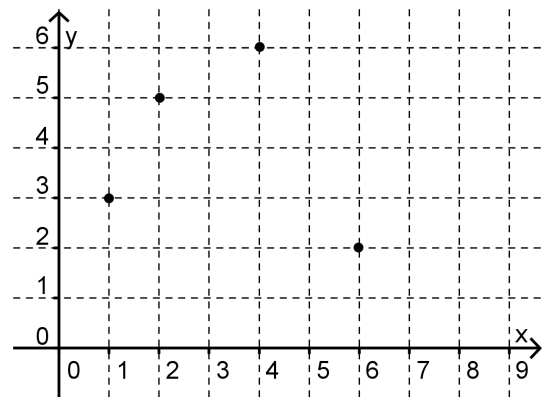
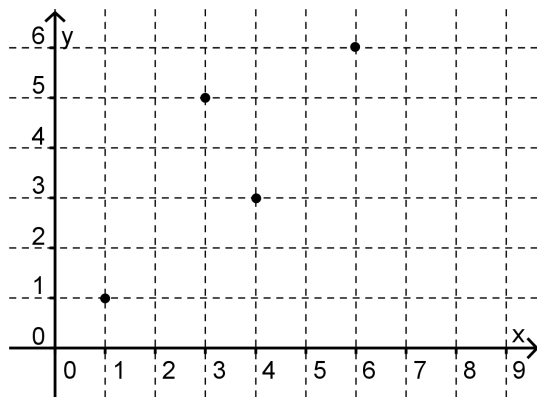
Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir vier Beispiele:

- a) $(x_i | y_i) = (1 | 1), (2 | 3), (4 | 4), (6 | 6),$
- b) $(x_i | y_i) = (1 | 2), (3 | 1), (4 | 6), (6 | 4),$
- c) $(x_i | y_i) = (1 | 6), (2 | 4), (4 | 2), (6 | 1),$
- d) $(x_i | y_i) = (1 | 5), (2 | 1), (5 | 6), (6 | 2),$



5. Grafisches

Bestimme den Korrelationskoeffizienten anhand der Grafiken.



Übung
 Man nehme sich zwei (verschiedenfarbige) Würfel und werfe beide zusammen viermal. Der eine Würfel bezeichnet die x -Koordinate eines Punktes, der andere die y -Koordinate. So erhält man 4 Punkte. Bestimme den Korrelationskoeffizienten dieser Punktverteilung.

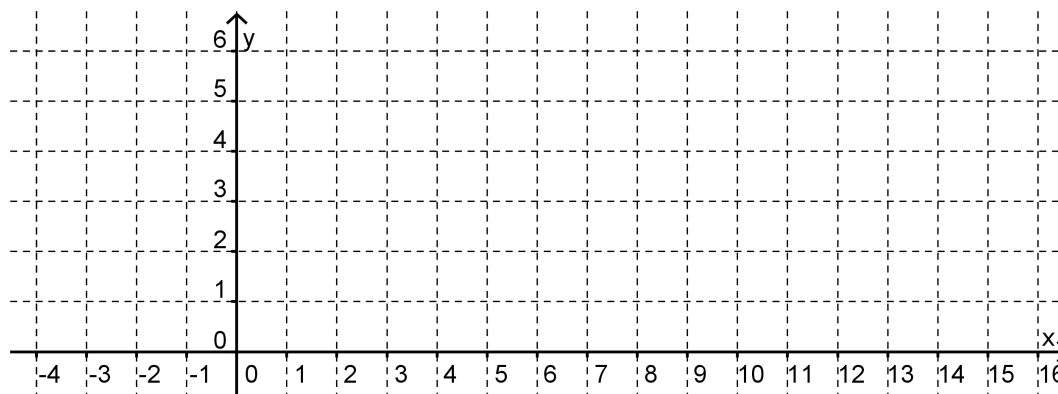
2.2. Lineare Regression

1. Bemerkung

Im folgenden geht es darum, durch eine Menge von Punkten im Koordinatensystem die optimale Gerade zu legen. Dabei stellt sich dann die Frage, was unter der optimalen Geraden zu verstehen ist.

2. Musterbeispiel

Wir betrachten die Messpunkte $(1|1)$, $(4|2)$ und $(10|6)$



3. Übung

Bestimme die Regressionsgerade durch $(0|8)$, $(2|3)$, $(3|1)$ und $(5|-2)$.

**4. Übung**

Ebenso: $(1|1)$, $(2|-1)$, $(3|0)$, $(4|1)$.



2.3. Regressionskurven

1. Bemerkung

In der Praxis ist die gesuchte, bestmöglich an die Daten angepasste Kurve, wohl eher selten eine Gerade. Je nach Aufgabenstellung kann es sich um eine Polynomfunktion, Potenz- oder Exponentialfunktion handeln. Beispiele sind: Wurfparabel (Polynomfunktion), Volumenberechnungen, Gasgesetz etc. (Potenzen) und Radioaktivität (Exponentialfunktion).

2. Wurfparabel

In einem Experiment wird eine Kugel durch die Luft geworfen. Dabei darf angenommen werden, dass die Flugbahn der Kugel eine Parabel $y = f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschreibt.

Mit Hilfe von Lichtschranken in verschiedenen Höhen misst man die Durchgangszeiten der Kugel.

<i>Schranke</i>	1.5 m	2 m	2.5 m
<i>Zeiten</i>	0.09, 1.03	0.21, 0.88	0.42, 0.68

Die Lichtschranke in 1.5 m Höhe stoppte die Kugel nach 0.09 Sekunden (im Flug nach oben) und nach 1.03 Sekunden (im Flug nach unten).

- a) Führe eine quadratische Regression durch. Welches ist die Gleichung des bestangepassten Funktion?
- b) Beantworte folgende Fragen:
 - b₁) Zu welcher Zeit t landet die Kugel am Boden?
 - b₂) Wie hoch war die Abwurfhöhe?
 - b₃) Welche maximale Höhe erreichte die Kugel? Wann war das der Fall?



3. Vergleich von Regressionskurven

Gegeben sind die folgenden Messwerte:

x_i	3	5	10	16	25
y_i	20	10	4	2	1

Welche Regressionskurve passt am besten durch diese Messpunkte?

**4. Sättigungskurve**

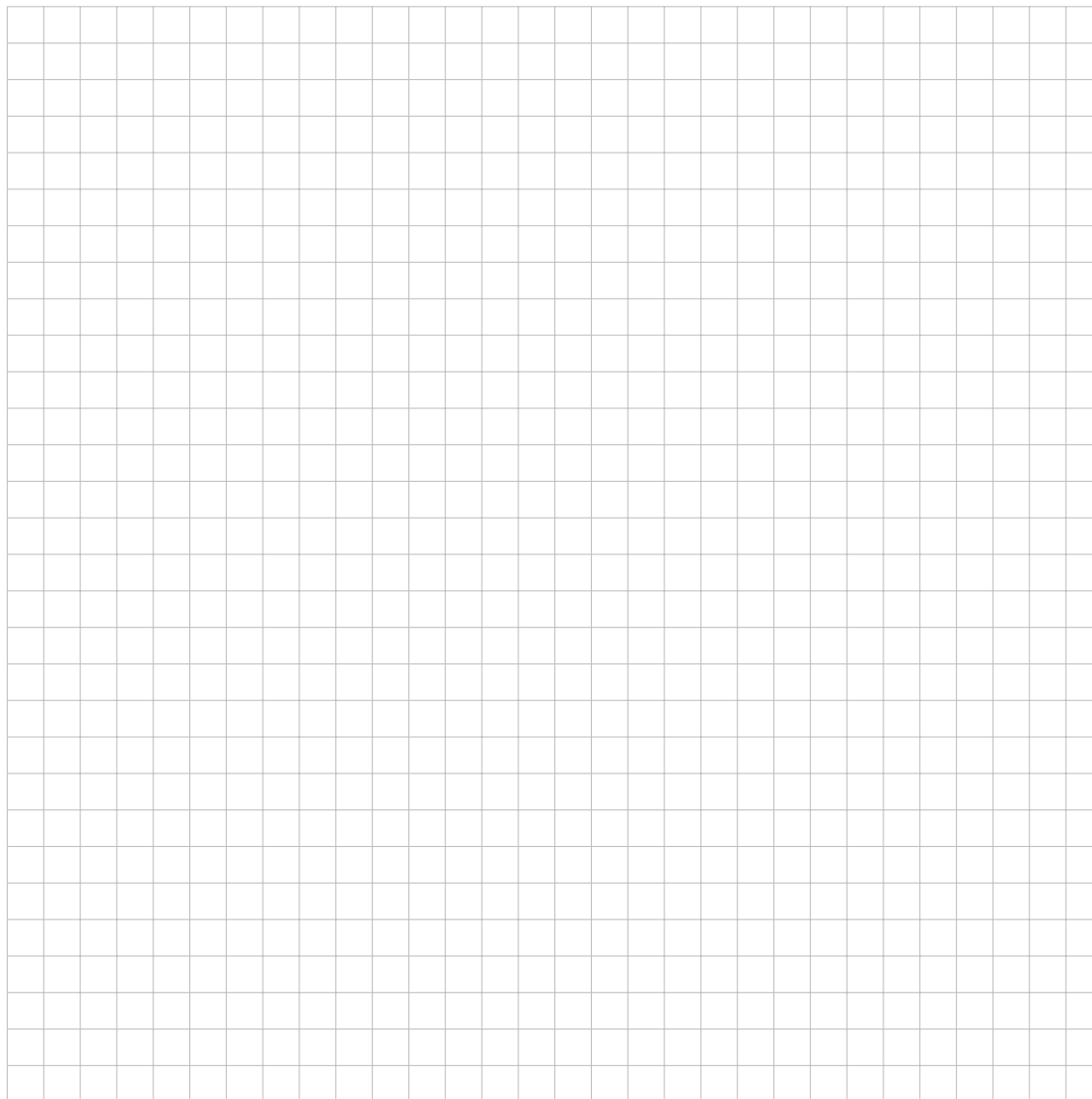
Aus einem chemischen Experiment erhält man die folgenden Daten:

<i>Zeit</i>	0	5	10	15	20	30	40	60
<i>Prozent</i>	5	22	35	45.5	53	64	70	76.5



3. Beispiele

- a) Lege die bestmögliche Exponentialfunktion mit der x -Achse als Asymptote durch die Punkte $(0|1)$, $(2|2)$ und $(7|7)$.
- b) Ebenso: $(-3|5)$, $(0|2)$ und $(3|1)$.

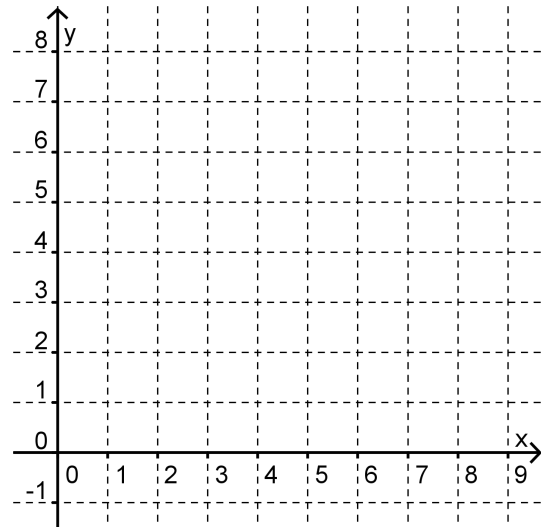
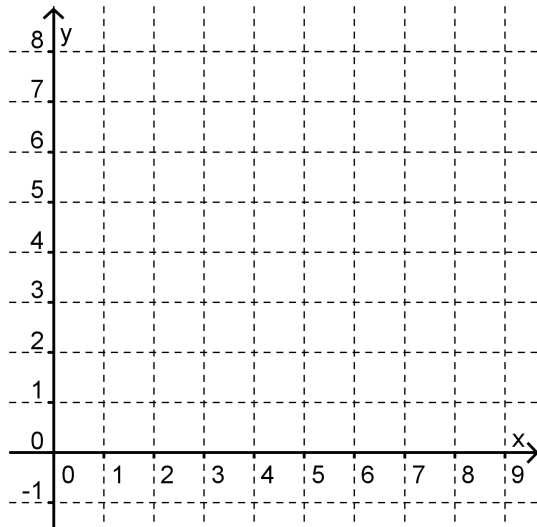
**Kleine Knacknuss**

In einem Zimmer, welches 20° warm ist, steht eine Tasse Kaffee. Zu Beginn misst man eine Kaffeetemperatur von 65° , zwei Minuten später 55° und weitere fünf Minuten später noch 45° .

Bestimme die Gleichung der bestangepassten Funktionskurve.

4. Potenzfunktionen

Wir wollen die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ (für $x > 0$) linearisieren.



Verallgemeinerung und Begründung dazu:

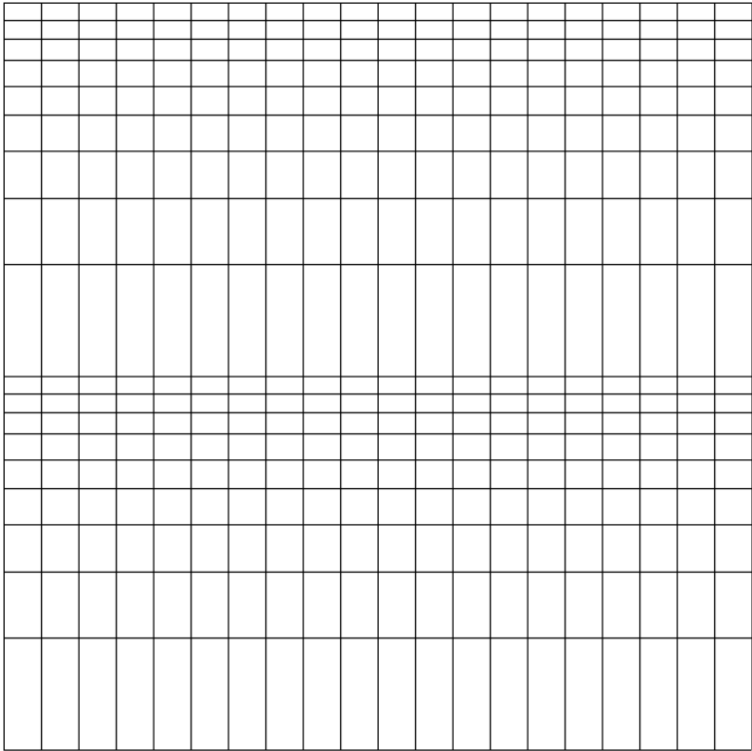


5. Bemerkungen

Es gibt bekannte Beispiele logarithmierter Skalen: Die Dezibel-Skala für die Lautstärke, die Richter-Skala für die Erdbebenstärke und die Skala für den pH-Wert einer Säure oder Base.

Vor allem früher wurden in der Industrie Papiere mit logarithmischen Skalen sehr oft gebraucht.

6. **Einfach-Logarithmisches Papier**



7. **Doppelt-Logarithmisches Papier**

