

## 5. Kugeln

### 5.1. Die Koordinatengleichung einer Kugel

#### 1. Kugelgleichung

Bestimme jeweils Mittelpunkt und Radius der Kugel

- $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z - 4 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 27 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 7 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + z + 3 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 10z + 9 = 0$

#### 2. Kugeln

Bestimme die Kugelgleichung

- Von einer Kugel kennt man das Zentrum  $(2 \mid -3 \mid 4)$  und den Radius  $r = 6$ .
- Von einer Kugel kennt man das Zentrum  $M(5 \mid 1 \mid -8)$  und den Punkt  $P(3 \mid 4 \mid -2)$  auf der Kugeloberfläche.
- $A(3 \mid 9 \mid -2)$   $B(7 \mid -5 \mid 6)$  ist Durchmesser der Kugel.

### 5.2. Anwendungen

#### 1. Tangentialebenen

Gegeben ist die Kugel  $k: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$ .

- Bestimme die Tangentialebenen, welche zur Ebene  $6x + 3y - 2z = 0$  parallel liegen.
- Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in einem der Schnittpunkte von  $k$  mit der  $z$ -Achse.

#### 2. Schnittpunkte und Schnittwinkel

Bestimme die Schnittpunkte und den Schnittwinkel von  $g$  und  $k$ .

- $g: (2 \mid 5 \mid 3)$   $(-5 \mid 8 \mid 3)$ ,  $k: M(8 \mid -10 \mid -9)$ ,  $r = 17$ .
- $g: (3 \mid -1 \mid 4)$   $(5 \mid -1 \mid 3)$ ,  $k: M(6 \mid -3 \mid 0)$ ,  $r = 3$ .
- $g: (2 \mid -1 \mid 2)$   $(5 \mid -2 \mid 2)$ ,  $k: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$ .

#### 3. Kugel und Gerade (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist die Gerade  $g: (3 \mid 2 \mid 5)$   $(3 \mid -5 \mid 8)$  und die Kugel  $k: x^2 + y^2 + z^2 + 18x - 16y + 20z - 44 = 0$ .

- Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel  $k$ .
- Bestimme die Schnittpunkte und den Schnittwinkel zwischen  $g$  und  $k$ .

**4. Anwendung**

Eine Kugel soll durch die Punkte  $A(2|1|4)$  und  $B(6|-5|6)$  gehen und ihr Zentrum auf der Geraden  $g: (5|-2|5) (6|-1|7)$  haben.

Bestimme die Gleichung dieser Kugel.

**5. Grösster Abstand**

Welcher Punkt auf der Kugel  $k$  liegt am weitesten von der Geraden  $g$  entfernt?

$g: (4|5|1) (5|7|3)$ ;  $k: x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 10z + 9 = 0$

**6. Berührung**

Die beiden Kugeln  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$  und  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 4z + t = 0$  sollen sich berühren. Wie gross ist  $t$ ?

**7. Zwei sich berührende Kugeln (Aus einer Prüfung)**

Man hat zwei Kugeln.

Von  $k_1$  kennt man das Zentrum  $M_1(3|2|5)$  und den Punkt  $P(1|8|2)$  auf der Kugelfläche  $k_1$ .

Von  $k_2$  kennt man das Zentrum  $M_2(11|-2|13)$ .

- Die beiden Kugeln sollen sich von aussen berühren. Bestimme  $r_2$  und die Koordinaten des Berührungspunkts.
- Bestimme die Koordinaten der beiden Punkte  $Q_1$  und  $Q_2$  (auf  $k_1$  resp.  $k_2$ ), welche am weitesten auseinander liegen.

**8. Umkugel**

Die Punkte  $A(3|1|0)$ ,  $B(7|3|4)$  und  $C(5|-1|8)$  sind Eckpunkte eines Quadrates  $ABCD$ , welches Bodenfläche eines Würfels ist.

Bestimme die Gleichung der Umkugel dieses Würfels.

(Die Umkugel geht durch alle 8 Würfecken.)

**9. Zwei Tangentialebenen**

Eine Kugel soll die beiden Ebenen  $\varepsilon_1: 4x - y + 8z + 1 = 0$  und  $\varepsilon_2: 2x + y + 2z - 1 = 0$  berühren und ihr Zentrum auf  $g: (6|6|1) (7|8|3)$  haben.

Bestimme die Gleichung dieser Kugel.

**10. Tangentialebenen (Aus einer Prüfung)**

Gegeben sind die Kugel  $k: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 55 = 0$

und die Gerade  $g: (4|9|-3) (8|5|4)$ .

Bestimme eine zu  $g$  senkrechte Tangentialebene  $\varepsilon$  an die Kugel  $k$ .

Gesucht ist die Koordinatengleichung von  $\varepsilon$  und der Berührungspunkt.

**11. Schneidende Kugeln**

Von zwei sich schneidenden Kugeln kennt man die Zentren  $M_1(4|3|6)$  und  $M_2(8|2|-2)$ .

Weiter kennt man den Punkt  $P(6|7|2)$ , der auf beiden Kugelflächen liegt.

Bestimme den Radius des Schnittkreises.

**12. Kugel berührt Gerade**

Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel  $k$  mit Zentrum  $M(4|2|-5)$ , welche die Gerade  $g: (3|3|-1) + \lambda(4|5|1)$  berührt.

Zusatz: Bestimme die Koordinaten des Berührungspunkts.

**13. Strecke**

Die Kugel mit Zentrum  $M(1|9|-2)$  soll aus der Geraden  $g$  eine Strecke der Länge 6 herauschneiden.

$g: (8|12|0) + \lambda(10|14|-1)$ .

Berechne den Radius dieser Kugel und die Endpunkte der gesuchten Strecke.

**14. Kugel und Ebene (Aus einer Prüfung)**

Gegeben ist die Kugel  $k$  und die Ebene  $\varepsilon$ :  $k: x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 4z + t = 0$ ,  $\varepsilon: 4x + y + 8z + 12 = 0$

- Wie gross muss  $t$  sein, damit die Kugel  $k$  die Ebene  $\varepsilon$  berührt?
- Wie gross muss  $t$  sein, damit der Schnittkreis von  $k$  und  $\varepsilon$  Radius 2 hat?