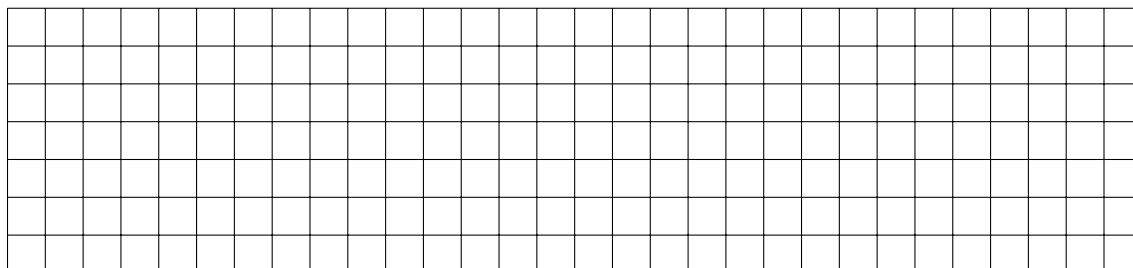


7. **Inzidenz**

Liegen die Punkte $P(2 | -8 | -4)$ resp. $Q(-2 | 4 | 5)$ in der Ebene ABC ?

Wenn man die Koordinatengleichung hat, dann ist diese Aufgabe entschieden einfacher zu lösen.



8. **Beispiele**

- a) Liegt der Punkt $P(3 | -1 | 0)$ in der Ebene $3x + 4y - z - 4 = 0$?
- b) Der Punkt $Q(3 | 6 | 9)$ soll in der Ebene $4x - y - 2z + d = 0$ liegen.
Wie gross ist d ?
- c) Bestimme t so, dass der Punkt $R(2 | t | 4)$ in der Ebene $4x + 2y - 7z - 3 = 0$ liegt.

9. **Achsenabschnitte**

Gegeben ist die Ebene ABC mit der Koordinatengleichung $3x - y + 2z - 6 = 0$.
Bestimme die Achsenabschnitte u , v und w .

Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt:

.....

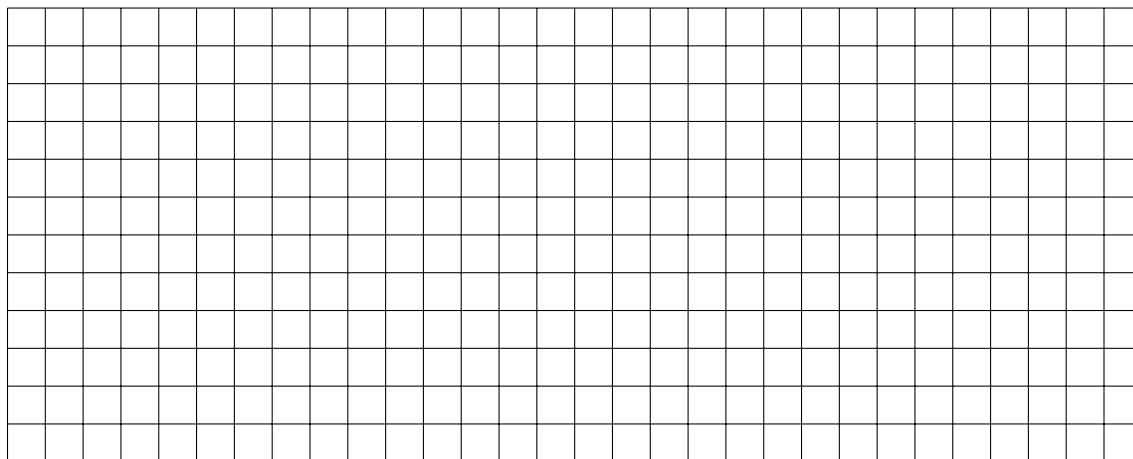
Für den Schnittpunkt mit der y -Achse gilt:

.....

Für den Schnittpunkt mit der z -Achse gilt:

.....

Nun ist es so, dass man die drei Achsenabschnitte in einem Schritt bestimmen kann.



10. Die Achsenabschnittsform

.....

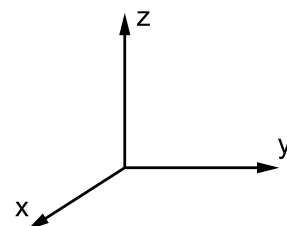
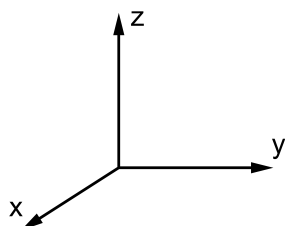
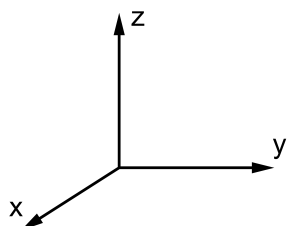
11. Musterbeispiele

- a) Bestimme die Achsenabschnitte der Ebene $2x - 9y + 5z - 6 = 0$
- b) Von einer Ebene kennt man die Achsenabschnitte $u = 2$, $v = -5$ und $w = -\frac{3}{4}$. Bestimme die Koordinatengleichung.

Lernkontrolle
 Eine Ebene ε ist durch die Punkte $(5|0|0)$, $(0|-3|0)$ und $(0|0|4)$ festgelegt. Bestimme die Koordinatengleichung von ε und ermittle dann, ob der Punkt $(2|1|8)$ in ε liegt.

12. Spezielle Lagen

Wenn bei der Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$ ein Koeffizient (oder mehrere) gleich Null sind, dann hat die zugehörige Ebene spezielle Lage.



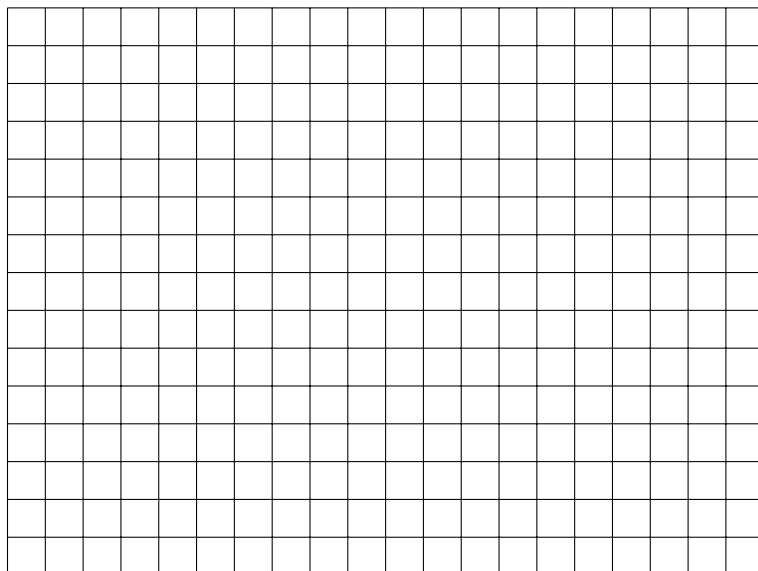
- a) $3x - 5y - 7 = 0$
-
- b) $4y + 12z - 1 = 0$
-
- c) $3x - 5y + 8z = 0$
-
- d) $3x - 5y = 0$
-
- e) $2z - 7 = 0$
-

2.2. Lot und Normalebene

1. Der Normalenvektor einer Ebene

Gegeben sei eine Ebene durch die Koordinatengleichung: $ax + by + cz + d = 0$.

Der Normalenvektor auf diese Ebene laute $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$.



2. Satz

Wir halten fest:

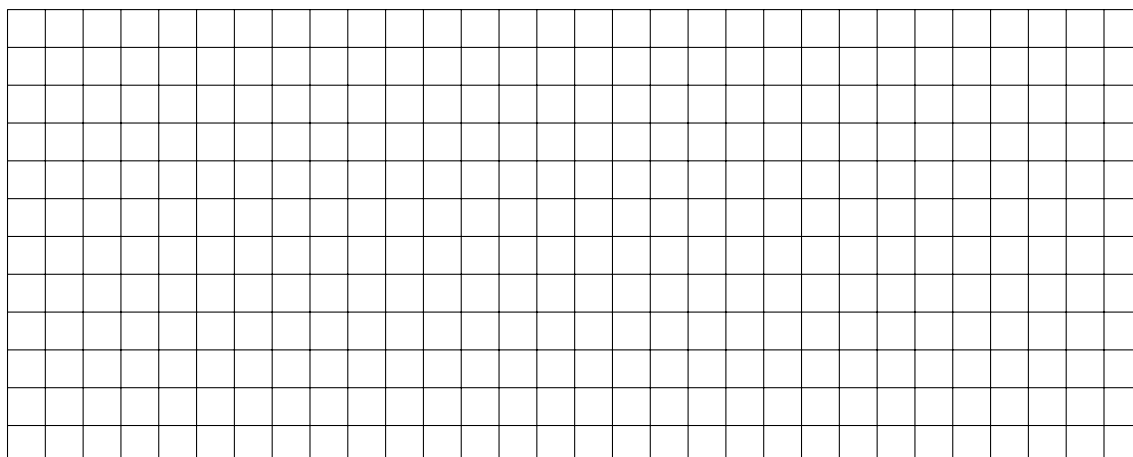
.....

.....

3. Grundaufgabe

Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte $P(6 | -2 | 8)$, $Q(1 | 3 | 0)$ und $R(3 | -2 | 4)$.

Mit dem Wissen über den Normalenvektor ist das Bestimmen der Koordinatengleichung einer Ebene viel einfacher:



4. **Beispiele**

Bestimme die Koordinatengleichung:

a) Die Ebene ist gegeben durch 3 Punkte: $(1|1|3)$, $(2|0|5)$, $(-2|1|6)$.

b) Die Ebene ist gegeben durch die Gerade g und den Punkt $(3|6|1)$.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Die Ebene ist gegeben durch zwei Parallelen g und h .

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. **Parallelebene**

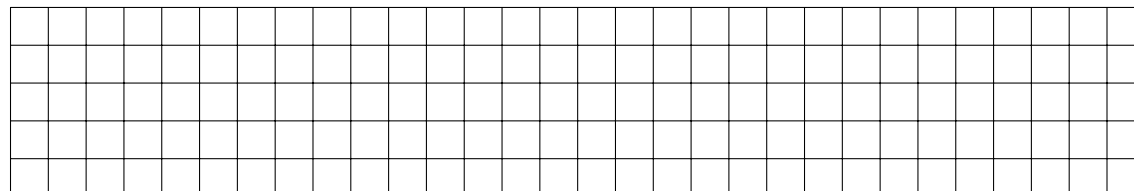
Bestimme die Parallelebene zur Ebene $3x - 7y + 2z - 8 = 0$ durch $A(6| -2|1)$.

Beachte:

6. **Lot von einem Punkt auf eine Ebene**

Bestimme das Lot vom Punkt $P(3|6|2)$ auf die Ebene $2x + 2y - z + 20 = 0$.

Beachte:



7. **Normalebene**

Von einer Ebene kennt man das Lot l und den Punkt $P(3|6|2)$.

Bestimme die Koordinatengleichung dieser Ebene.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Übung
 Gegeben ist die Strecke AB durch $A(2|7|9)$ und $B(3|4|2)$.
 Bestimme die Koordinatengleichungen der beiden Normalebenen zur Strecke AB in den Endpunkten der Strecke.

2.3. Gegenseitige Lage

1. **Zwei Ebenen**

Gegeben sind zwei Ebenen. Dann bestehen folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

.....

2. **Musterbeispiele**

Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen:

a) $3x - 2y + 5z - 7 = 0$ und $4x + y - 3z - 1 = 0$

.....

b) $2x - y + 4z - 7 = 0$ und $4x - 2y + 8z - 1 = 0$

.....

.....

Wie man den Abstand zweier paralleler Ebenen und die Schnittgerade sowie den Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen berechnet, sehen wir in einem späteren Kapitel.

3. **Eine Gerade und eine Ebene**

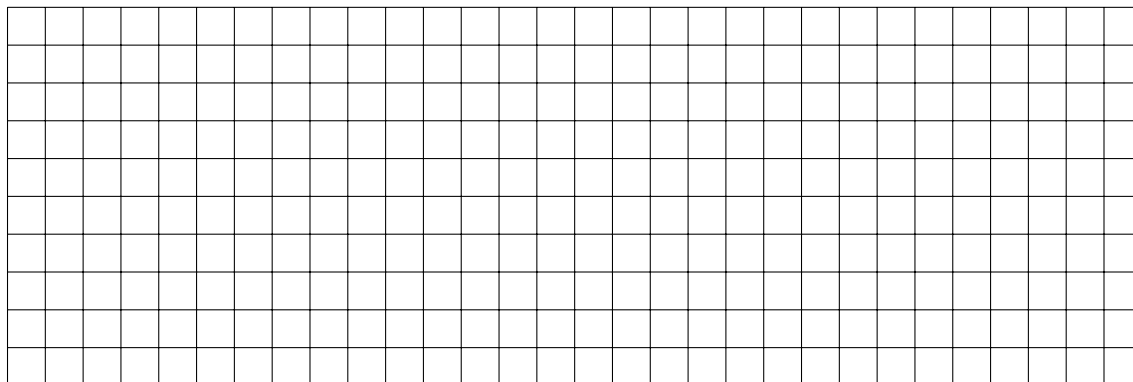
Es gibt folgende Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

.....

4. **Grundaufgabe**

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene:

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon : 2x + 3y - z - 6 = 0$$



5. **Bemerkungen**

Beim Berechnen eines Schnittpunktes mit einer Geraden können Sonderfälle auftreten.

- a) Wenn die entstehende Gleichung für den Parameter t der Geraden keine Lösung hat, dann ist die Gerade zur Ebene parallel. Das kann man allerdings auch vor der Berechnung prüfen:

.....

Wie man dann den Abstand der Geraden zur Ebene berechnet, folgt später.

- b) Wenn die entstehende Gleichung für den Parameter t der Geraden unendlich viele Lösungen hat, dann liegt die Gerade *in* der Ebene. Dies ist ein Spezialfall von der Situation, dass die Gerade zur Ebene parallel liegt.

.....

.....

.....

6. **Übungen**

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

- a) $g : (7 | -6 | 7) (3 | 6 | -1)$, $\varepsilon : 2x - y + 2z - 7 = 0$
- b) $g : (11 | 13 | 5) (13 | 16 | 6)$, $\varepsilon : 2x - y + 2z - 7 = 0$
- c) $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon : 3x - y + 4z - 2 = 0$
- d) $g : (3 | 6 | 2) (4 | 7 | 3)$, $\varepsilon : 4x - 7y + 3z - 4 = 0$

Lernkontrolle
 Gegeben sind die Punkte P, Q, A, B und C .
 $P(8 | -1 | 3)$, $Q(6 | 0 | 1)$,
 $A(1 | 1 | -1)$, $B(2 | 1 | 1)$, $C(0 | 3 | 3)$.
 Bestimme den Schnittpunkt von PQ durch die Ebene ABC .

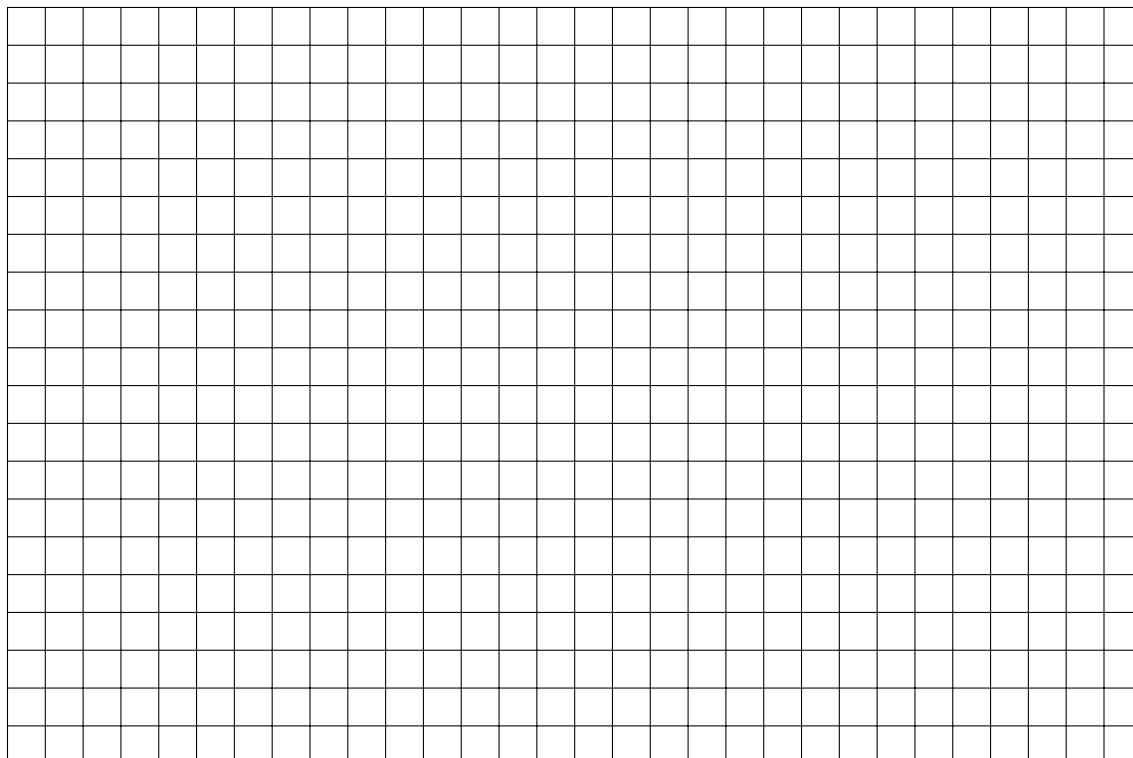
2.4. HNF

1. Musterbeispiel

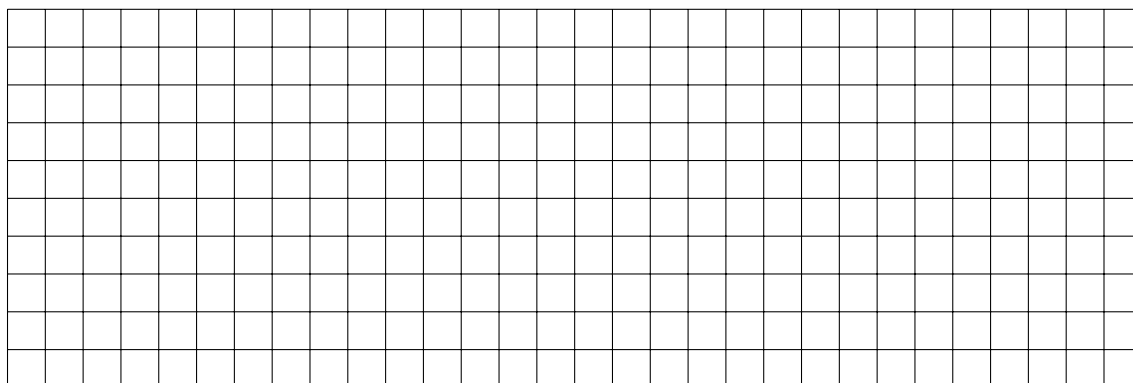
Gegeben ist der Punkt $P(9|3|-5)$ und die Ebene $2x + y - 2z + 5 = 0$.

Wir berechnen der Reihe nach:

- Das Lot von P auf die Ebene.
- Den Lotfußpunkt.
- Den Abstand von P zur Ebene.



- Berechne die Norm des Normalenvektors zur Ebene (Koordinatengleichung).
- Setze die Koordinaten von P in der Ebenengleichung ein. Weil P nicht in der Ebene liegt, wird links vom Gleichheitszeichen keine Null herauskommen.



2. Die Hessesche Normalform HNF

Die HNF einer Ebene erhält man, indem man

.....

Wenn man die Koordinaten eines Punktes

.....

3. Beispiel

Bestimme den Abstand der Punkte

$P(1|1|-1)$, $Q(2|3|-3)$, $R(0|1|0)$, $S(5|1|-2)$

zur Ebene $4x - 4y + 7z - 2 = 0$

Übung

Gegeben sind die Punkte P , Q , A , B und C .

$P(8|-2|4)$, $Q(1|1|-1)$,

$A(3|3|1)$, $B(1|0|3)$, $C(1|-3|1)$.

Bestimme den Abstand von P und von Q zur Ebene ABC .