

5. Kugeln

Übungen

1) Kugelgleichung

Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugeln:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 4z - 4 = 0$
 b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8z + 27 = 0$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 7 = 0$

2) Schnittpunkte

Bestimme Schnittpunkte und Schnittwinkel der Gerade g mit der Kugel k :

- a) $g: (2 \mid 5 \mid 3) \ (-5 \mid 8 \mid 3)$ $k: M(8 \mid -10 \mid -9), r = 17$
 b) $g: (3 \mid -1 \mid 4) \ (5 \mid -1 \mid 3)$ $k: M(6 \mid -3 \mid 0), r = 3$
 c) $g: (2 \mid -1 \mid 2) \ (5 \mid -2 \mid 2)$ $k: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$

3) Tangentialebenen

Gegeben ist die Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$.

- a) Bestimme die Tangentialebenen, welche zur Ebene $6x + 3y - 2z = 0$ parallel liegen.
 b) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene in einem der beiden Schnittpunkte von k mit der z -Achse.

4) Anwendung

Eine Kugel soll durch die Punkte $A(2 \mid 1 \mid 4)$ und $B(6 \mid -5 \mid 6)$ gehen und ihr Zentrum auf der Geraden $g: (5 \mid -2 \mid 5) \ (6 \mid -1 \mid 7)$ haben. Bestimme die Gleichung dieser Kugel.

5) Grösster Abstand

Welcher Punkt der Kugel k liegt am weitesten von der Geraden g entfernt?

$g: (4 \mid 5 \mid 1) \ (5 \mid 7 \mid 3)$; $k: x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 10z + 9 = 0$.

6) Berührung

Die beiden Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$
 und $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 4z + t = 0$ sollen sich berühren.
 Wie gross ist t ?

7) Umkugel

Die Punkte $A(3 \mid 1 \mid 0)$, $B(7 \mid 3 \mid 4)$ und $C(5 \mid -1 \mid 8)$ sind Eckpunkte eines Quadrates $ABCD$, welches Bodenfläche eines Würfels ist.

Bestimme die Gleichung der Umkugel dieses Würfels.

[Die Umkugel des Würfels ist die Kugel, welche durch alle 8 Würfecken geht.]

8) Zwei Tangentialebenen

Eine Kugel soll die beiden Ebenen $\varepsilon_1: 4x - y + 8z + 1 = 0$ und $\varepsilon_2: 2x + y + 2z - 1 = 0$ berühren und ihr Zentrum auf $g: (6 \mid 6 \mid 1) \ (7 \mid 8 \mid 3)$ haben.

Bestimme die Gleichung dieser Kugel.

9) Schneidende Kugeln

Von zwei sich schneidenden Kugeln kennt man die Zentren: $M_1(4 \mid 3 \mid 6)$, $M_2(8 \mid 2 \mid -2)$.

Weiter kennt man den Punkt $P(6 \mid 7 \mid 2)$, der auf beiden Kugelflächen liegt.

Bestimme den Radius des Schnittkreises.

10) Kugel berührt Gerade

Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel k mit Zentrum $M(4 \mid 2 \mid -5)$, welche die Gerade $g: (3 \mid 3 \mid -1) \ (4 \mid 5 \mid 1)$ berührt.