

5. Kugeln

1) Ebene und räumliche Vektorgeometrie

Theoretisch können alle Aufgaben dieses Kapitels in 2 oder 3 Dimensionen gelöst werden. In der Ebene betrachten wir Kreise, im Raum Kugeln. Wir beschränken uns aber auf die dreidimensionale Vektorgeometrie, d.h. auf die Kugelgleichung.

2) Beispiel

Wo liegen alle Punkte, die vom Punkt $M(5 \mid -2 \mid 3)$ Abstand 8 haben?

.....

.....

3) Die Koordinatengleichung der Kugel

Gegeben ist der Punkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$. Alle Punkte $P(x \mid y \mid z)$, die von M den konstanten Abstand r haben, liegen auf der Kugel mit Zentrum M und Radius r . Die Koordinatengleichung der Kugel lautet:

.....

4) Grundaufgabe

Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 8z + 7 = 0$.

5) Bestimme Mittelpunkt und Radius

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 16z - 208 = 0$
 c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + y - 1 = 0$

6) Tangentialebene

Von einer Kugel kennt man das Zentrum $M(5 \mid 1 \mid 3)$ und einen Punkt $P(3 \mid 7 \mid 0)$ auf der Kugeloberfläche. Gesucht ist die Tangentialebene im Punkt P .

7) Schnittpunkt und Schnittwinkel

In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Kugel k ?
 $g: (-1 \mid 1 \mid 4) (7 \mid -5 \mid 8)$; $k: M(1 \mid 1 \mid 0), r = 7$.

8) Beispiel

Gegeben sind $k_1: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 15 = 0$ und $k_2: x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 4y + 49 = 0$.

Weise nach, dass sich die Kugeln berühren und bestimme den Berührungspunkt.

9) Berührung von zwei Kugeln

Zwei Kugeln berühren sich, wenn

.....

10) Anwendung

Gegeben sind die Kugeln $k_1: x^2 + y^2 + z^2 - 1296 = 0$ und $k_2: M(6 \mid -3 \mid -6), r = 18$. Bestimme den kürzesten Abstand der beiden Kugeln sowie die Koordinaten der beiden am nächsten beieinanderliegenden Punkte (auf den beiden Kugeloberflächen).

11) Die Apolloniuskugel

Behauptung: Die Punkte, die von $A(0 \mid -1 \mid 6)$ dreimal so grossen Abstand haben wie von $B(12 \mid 3 \mid -2)$, liegen auf einer Kugel. Beweis?