

5. Kugeln

Lösungen

1) Kugelgleichung

- a) $M(4 \mid -1 \mid 2)$, $r = 5$
 b) $M(2 \mid -3 \mid -4)$, $r = \sqrt{2}$
 c) Weil $r^2 < 0$ ist, erfüllt kein Punkt des Raumes diese Gleichung.

2) Schnittpunkte

Bestimme Schnittpunkte und Schnittwinkel der Gerade g mit der Kugel k :

- a) $S_1(9 \mid 2 \mid 3)$, $S_2(16 \mid -1 \mid 3)$, $\alpha = 12.944^\circ$
 b) $S(7 \mid -1 \mid 2)$, die Gerade ist Kugeltangente.
 c) $S_1(8 \mid -3 \mid 2)$, $S_2(-1 \mid 0 \mid 2)$, $\alpha = 42.659^\circ$ [$M(2 \mid -6 \mid 4)$, $r = 7$]

3) Tangentialebenen

- a) $6x + 3y - 2z - 35 = 0$ und $6x + 3y - 2z + 63 = 0$
 [Berührungspunkte $B_1(8 \mid -3 \mid 2)$ und $B_2(-4 \mid -9 \mid 6)$.]
 b) $-2x + 6y - 3z + 3 = 0$ oder $-2x + 6y + 3z - 21 = 0$.
 [Setze $x = y = 0$, das ergibt die Berührungspunkte $(0 \mid 0 \mid 1)$ und $(0 \mid 0 \mid 7)$.]

4) Anwendung

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 35.$$

[Eine Umformung dieser Gleichung ist nicht nötig.]

M muss zu A und B gleiche Entfernung haben.

Also schneidet man die Mittelnormalebene zu AB ($2x - 3y + z - 19 = 0$) mit g .]

5) Grösster Abstand

$$P(8 \mid 4 \mid -9)$$

[Bestimme zunächst das Lot von $M(4 \mid 2 \mid -5)$ auf g . Es ist $L(2 \mid 1 \mid -3)$. Schneide dann die Gerade ML mit der Kugel. Der andere Schnittpunkt ist $(0 \mid 0 \mid -1)$]

6) Berührung

$$t_1 = 13, t_2 = -71.$$

[$M_1(2 \mid -6 \mid 4)$, $r_1 = 7$. $M_2(3 \mid -4 \mid 2)$, $r_2 = \sqrt{29 - t}$, Abstand der Zentren: 3, also ist $r_2 = 4$ für Berührung von aussen oder $r_2 = 10$ für Berührung von innen.]

7) Umkugel

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 27.$$

$$2. \text{ Lösung: } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 27$$

[Der Punkt, der A gegenüber liegt, ist $G(9 \mid -5 \mid 6)$, was man mit einem Lot auf die Ebene $ABCD$ durch C berechnet. Für die 2. Lösung ist $G(1 \mid 3 \mid 10)$.]

8) Zwei Tangentialebenen

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 9)^2 = 49 \text{ oder } (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1.$$

[Das Zentrum muss auf g liegen und zu beiden Ebenen gleichen Abstand haben. Setze die HNF's der Ebenen gleich und schneide mit g . Der Radius ist der Abstand von M zu einer der gegebenen Ebenen.]

9) Schneidende Kugeln

$$r = \sqrt{20} \text{ resp. } 4.472.$$

[Variante 1: r ist der kürzeste Abstand von P zur Geraden durch die Zentren.]

Variante 2: Rechne den Winkel $\angle(M_2M_1P) = 48.19^\circ$ und $\|M_1P\| = 6$.

$$\text{Dann ist } r = 6 \cdot \sin(48.19^\circ)]$$

10) Kugel berührt Gerade

Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel k mit Zentrum $M(4 \mid 2 \mid -5)$, welche die Gerade $g: (3 \mid 3 \mid -1) + t(4 \mid 5 \mid 1)$ berührt.

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 9$$

[Der Radius ist der kürzeste Abstand von M zu g . Berechne mit oder ohne Lotfußpunkt = Berührungspunkt $L(2 \mid 1 \mid -3)$. Das ergibt $r = 3$]