4. Anwendungen

Lösungen

1) Parallele

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$ [g liegt parallel zur Schnittgeraden der beiden Ebenen.]

2) Drei Ebenen

$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

[Bestimme s als Schnittgerade der ersten beiden Ebenen. Zwei Punkte der Schnittgerade, beispielsweise (2 | 1 | 0), (1 | 2 | 2) liegen auch in der dritten Ebene.]

3) Transversale

A (21 | 4 | 12), B (29 | 2 | 18)

[Bestimme eine Ebene durch a mit zusätzlichem Richtungsvektor $\vec{v}$. t muss in dieser Ebene liegen. Schneide diese Ebene mit b. Das ergibt B. Dann hat man t, weil $\vec{v}$ der Richtungsvektor von t ist. t mit a schneiden ergibt A.]

4) Projektionsebene

11x + 16y – 14z – 60 = 0

[$\overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}_\varepsilon$ sind zwei Richtungsvektoren der gesuchten Ebene.]

5) Lichtstrahl

a) R (11 | 4 | 10)
[Schneide AB mit ε.]

b) (8.5 | 6.5 | 0)
[Spiegle A an ε. $\overline{A}$ (14 | 1 | 22). Schneide $\overline{A}$R mit der Ebene z = 0.]

6) Quadrat

C (12 | –1 | –1), D (8 | –3 | –5) oder C (4 | 7 | 3), D (0 | 5 | –1)

[Die Punkte A und B haben Abstand 6. Das ist die Länge der Quadratseite.
$\overrightarrow{AB} \times \vec{n}_\varepsilon$ schaut in Richtung BC resp. AD. Bringe diesen Vektor auf Länge 6 und hänge ihn in A resp. B an.]

7) Würfel

C (8 | –3 | 13) ist eindeutig. B (7 | 5 | 9), D (4 | –7 | 6) sind vertauschbar.

(Die weitern Punkte sind mit obigem B und D gerechnet, andernfalls sind F und H vertauscht. Es gibt 2 Lösungen)

E (11 | 0 | 2), F (15 | 4 | 5), G (16 | –4 | 9), H(12 | –8 | 2) oder
E (–5 | 2 | 6), F (–1 | 6 | 13), G (0 | –2 | 17), H(–4 | –6 | 10)

[Bestimme zunächst den Mittelpunkt des Quadrats ABCD. Das ist der Lotfusspunkt von A auf g. M (5.5 | –1 | 7.5). A an M spiegeln ergibt C. Rechne den Abstand von A zu M – das ist die halbe Diagonale des Quadrats ABCD – und bringe dann den Richtungsvektor von g auf diese Länge. In M anhängen ergibt B und D.

Rechne den Abstand von A zu B. Das ist die Kantenlänge des Würfels. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ schaut in Richtung der fehlenden Würfelkante AE. Bringe diesen Vektor auf die richtige Länge und hänge ihn in A, B, C und D an.

8) Pyramide

a) D (13 | 6 | –2)

b) S (15 | –5 | 11) oder S (3 | 19 | 3)

[M (9 | 7 | 7) ist das Zentrum des Bodenquadrats. Die Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. S liegt auf der Geraden durch M mit Richtung $\vec{n}_\varepsilon$. S (9 + 3t | 7 – 6t | 7 + 2t) muss zu A Abstand $7 \cdot \sqrt{6}$ haben.]

9) Pyramide

S (15 | 0 | 4)

Bodenquadrat (10 | 5 | 11), (6 | 3 | 7), (8 | 7 | 3), (12 | 9 | 7)

[Das ist eine frühere Maturaufgabe.

Bestimme zunächst die Ebene, die durch die Mittelparallele von g und h geht und zur Ebene von g und h (die hat die Koordinatengleichung 2x – 2y – z + 1 = 0) senkrecht steht. In dieser Ebene x + 2y – 2z – 7 = 0 liegen alle Punkte, die von g und h gleiche Entfernung haben. Diese Ebene mit s geschnitten ergibt S.

Dann legt man das Lot von S auf die Ebene von g und h. Der Lotfusspunkt ist der Mittelpunkt des Bodenquadrates. M (9 | 6 | 7).

Die Lotfusspunkte von M auf die Geraden g resp. h geben die Mittelpunkte der Quadratseiten. Diese Punkte sind (8 | 4 | 9) resp. (10 | 8 | 5).

Der Abstand von M zu diesen Punkten beträgt 3 – und das ist die halbe Quadratseite.

Also bringt man den Richtungsvektor von g (h ist parallel dazu!) auf Länge 3 und hängt diesen in (8 | 4 | 9) resp. (10 | 8 | 5) an.]