Die Hesse'sche Normalform HNF einer Ebene

Studium

Alle Eigenschaften, welche für die HNF einer Geraden in der zweidimensionalen Vektorgeometrie gelten, gelten im dreidimensionalen Raum für die HNF einer Ebene.
Im vorliegenden Text werden alle notwendigen Schritte aufgeführt.
Der Text kann folglich als Repetition oder zum Selbststudium verwendet werden.

---

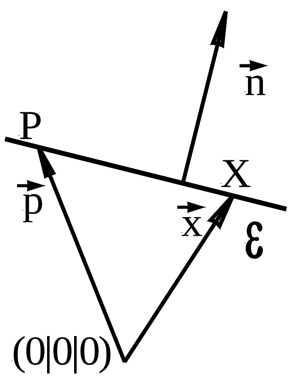
1) Der Normalenvektor einer Ebene

Gegeben ist eine Ebene ε durch einen Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$**.** Die Koordinatengleichung dieser Ebene sei $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$.

Es gilt der folgende Satz:
Wenn die Koordinatengleichung einer Ebene die Form $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ hat, dann sind die Koeffizienten von x, y, resp. z genau die Komponenten des Normalenvektors auf die Ebene, d.h. $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Beweis:

Wir betrachten (siehe die nebenstehende Figur) die Ebene ε und darin einen beliebigen Punkt $X(x \mid y \mid z)$.
Der Vektor $\overrightarrow{PX}$ liegt dann in der Ebene ε.
Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{PX}$, also gilt $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.
In Komponenten ausgeschrieben lautet diese Gleichung
$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$.



Ausrechnen und ordnen ergibt $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3 = 0$.
Diese letzte Gleichung entspricht der Koordinatengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$.

Somit folgt: $n_1 = a$, $n_2 = b$, $n_3 = c$ und damit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$**.** **QED**

Zusätzlich kann man erkennen, dass in der Koordinatengleichung für die Konstante $d = -n_1 \cdot p_1 - n_2 \cdot p_2 - n_3 \cdot p_3$ gilt, wobei man sich für P irgend einen (beliebigen) Punkt der Ebene denken kann.

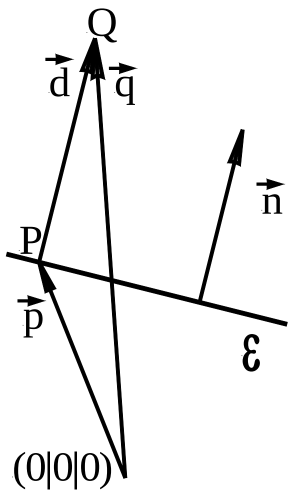
2) Die Hesse'sche Normalform HNF

Die Hessesche Normalform (HNF) einer Ebene ε lautet $\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$

Wir bemerken, dass die HNF der Koordinatengleichung entspricht, wobei die Gleichung durch die Länge des Normalenvektors dividiert wurde.

Es gilt der folgende Satz:
Wenn man einen Punkt $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ in die HNF einer Ebene einsetzt, dann ergibt die linke Seite der obigen Gleichung (bis auf ein ev. Vorzeichen) den Abstand des Punktes Q von ε.

Beweis:



In der Figur bezeichnet $\vec{d}$ den Abstandsvektor, dessen Länge gesucht ist.
Ferner sei $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ der Lotfusspunkt des Lotes von Q auf die Ebene ε.

Es gilt (aus der Figur ersichtlich) $\vec{n}\cdot\vec{d}=\vec{n}\cdot(\vec{q}-\vec{p})=\vec{n}\cdot\vec{q}-\vec{n}\cdot\vec{p}$.
Von dieser Gleichung betrachten wir nun die linke und die rechte Seite einzeln.

Die *linke Seite* ist nun gleich $\pm\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{d}\|$, je nachdem, ob $\vec{n}$ und $\vec{d}$ in die gleiche Richtung zeigen oder nicht.
(Denn deren Zwischenwinkel γ ist 0° oder 180° und somit $\cos(\gamma) = \pm 1$.)

Die *rechte Seite* ist $n_1\cdot q_1 + n_2\cdot q_2 + n_3\cdot q_3 - n_1\cdot p_1 - n_2\cdot p_2 - n_3\cdot p_3 = a\cdot q_1 + b\cdot q_2 + c\cdot q_3 + d$.

Also erhalten wir $\pm\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{d}\| = a\cdot q_1 + b\cdot q_2 + c\cdot q_3 + d$.

Nach Dividieren durch $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ erhalten wir

$\frac{aq_1+bq_2+cq_3+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\pm\|\vec{d}\|$. **QED**

Zusatz:
Wenn das Ergebnis nach dem Einsetzen von Q in die HNF negativ wird, dann liegt der Punkt Q auf der anderen Seite der Ebene als der Normalenvektor hinzeigt.

Begründung:
Wenn $\vec{n}$ und $\vec{d}$ in die gleiche Richtung zeigen, dann ist deren Zwischenwinkel 0° und somit wird $\cos(\gamma) = 1$. Zeigen sie in verschiedene Richtungen, dann wird $\gamma = 180°$ und somit $\cos\gamma = -1$.
Man kann sagen, dass jede Ebene eine positive und eine negative Seite hat. Der Normalenvektor zeigt in Richtung der positiven Seite.