

3. Abstände und Zwischenwinkel

3.1. Die 10 Grundaufgaben

1. Bemerkung

Für die Grundaufgaben zu diesem Kapitel gibt es ein Leitprogramm zu erarbeiten. Die Aufgaben aus dem Leitprogramm sind später Grundaufgaben für die Anwendungen.

2. Leitprogramm

Die Aufgaben des Leitprogramms:

- a) Abstand zweier Punkte
- b) Abstand eines Punktes von einer Geraden
- c) Abstand eines Punktes von einer Ebene
- d) Abstand zweier Parallelen
- e) Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden
- f) Abstand zweier windschiefer Geraden
- g) Abstand einer Geraden zu einer Ebene, wenn die Gerade zur Ebene parallel liegt
- h) Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene
- i) Abstand zweier paralleler Ebenen
- j) Schnittgerade und Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen

Übung

In diesen Übungen kommt jede Situation aus den zehn Grundaufgaben direkt oder indirekt vor.

- a) Gegeben sind $P(3|1|-3)$ und $g : (4|3|8) (9|1|12)$.
Bestimme den Abstand von P zu g .
- b) Gegeben sind die Geraden $g : (6|10|22) (4|4|19)$
und $h : (14|4|1) (7|-2|7)$.
Bestimme ihre gegenseitige Lage und anschliessend entweder den Abstand oder den Schnittpunkt und den Zwischenwinkel.
- c) Löse ebenso für die Geraden $a : (2|3|4) (5|1|4)$
und $b : (4|8|-1) (7|4|-2)$.
- d) Gegeben sind die Gerade $g : (2|8|6) (3|9|8)$ und die Ebene $\varepsilon : (2|5|2) (0|-1|1) (4|1|-2)$.
Bestimme den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.
- e) Bestimme die Schnittgerade und den Zwischenwinkel der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 .
 $\varepsilon_1 : 2x + y + z - 7 = 0, \varepsilon_2 : 3x - y + z - 3 = 0$.

3.2. Angewandte Aufgaben

1. Gleiche Abstände zu zwei Punkten

Welche Punkte haben von $A(3|0|7)$ und $B(7|2|1)$ gleiche Abstände?

2. Parallelebenen

Gegeben ist die Ebene $x - 2y + 2z - 12 = 0$.
Bestimme die Parallelebenen im Abstand 5.

3. Gleiche Abstände zu zwei Geraden

(Überlegungsaufgabe)

Welche Punkte sind von den beiden Geraden g und h gleich weit entfernt?

- Die Geraden sind parallel.
- Die Geraden schneiden sich.

4. In einer Ebene liegende Gerade

Gegeben ist die Gerade $g : (1 | -2 | -3) (2 | 0 | -2)$
und die Ebene $7x - 5y + 3z - 8 = 0$.
Zeige, dass g in der Ebene liegt.

5. Gleiche Abstände zu zwei Ebenen

Gegeben sind die Ebenen $x + 4y - 8z - 5 = 0$ und $2x + 5y - 14z - 3 = 0$.
Welche Punkte sind von den beiden Ebenen gleich weit entfernt?

Übung

Gegeben sind die beiden Ebenen $\varepsilon_1 : 2x + y + 2z - 5 = 0$ und $\varepsilon_2 : x + 4y - 8z - 1 = 0$ und die Gerade $g : (1 | 9 | 3) (1 | 7 | 2)$.

Bestimme alle Punkte auf der Geraden g , welche von den beiden Ebenen gleiche Entfernung haben.

Bemerkung: Die geometrische Aufgabe dahinter liest sich etwa wie folgt: Man weiss, dass eine Kugel ihr Zentrum auf g hat und die beiden Ebenen berührt. Wo liegt das Kugelzentrum?

6. Parameter zum Ersten

Die Punkte $A(1|3|t)$ und $B(3|0|2)$ sollen Abstand 7 haben. Wie gross ist t ?

7. Parameter zum Zweiten

Die Geraden g und h sollen sich schneiden. Wie gross ist t ?

$$g : (6 | 1 | 3) (10 | 3 | 8), \quad h : (2 | 2 | 9) (4 | 5 | t)$$

8. Parameter zum Dritten

Die Ebenen $3x - y + 2z - 5 = 0$ und $x + t \cdot y + 3z - 4 = 0$ sollen einen Winkel von 60° einschliessen. Wie gross ist t ?