Alle Abstands- und Zwischenwinkelprobleme der räumlichen Vektorgeometrie

Ein Leitprogramm

Oliver Riesen, Kantonsschule Zug

Liebe Schülerin, lieber Schüler

Die Blätter, die du jetzt gerade zu lesen begonnen hast, sind ein sogenanntes Leitprogramm. In einem Leitprogramm wirst du durch ein (mathematisches) Thema geführt (eben: geleitet).

In einem Leitprogramm kannst du dein Arbeitstempo selbst bestimmen. Wenn dir also ein Thema, eine Aufgabe sofort klar ist, dann kannst du rasch vorankommen. Wenn du bei einem Thema die Erklärungen langsamer und genauer lesen musst, dann hast du eben auch die Möglichkeit und Zeit dazu. Du kannst auch fortlaufend selbst kontrollieren, ob du ein Thema begriffen hast.

Bevor du jetzt mit der Arbeit beginnst, drei Bemerkungen:

a) Wenn du *kursiv gedruckten Text* vorfindest, dann enthält dieser Anleitungen zum Vorgehen.
b) Für die Arbeit benötigst du eigene Blätter oder ein Heft, denn du wirst Überlegungen notieren und Beispiele durchrechnen.
   Fett gedruckter Text enthält wichtige (theoretische) Bemerkungen zu den Beispielen. Eine passende Notiz ins Heft ist empfehlenswert.
c) Das Leitprogramm ist auch auf Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners ausgelegt. Du solltest ihn für die Arbeit bereithalten. Sorge aber zu Beginn dafür, dass nichts unter irgendwelchen Variabeln gespeichert ist.

Nun geht es also richtig los. Ich wünsche dir viel Erfolg bei der Arbeit.

Zusammenstellung:

In diesem Leitprogramm geht es ausschliesslich um Fragen der Art "Bestimme den Abstand von ... und ... " bzw. "Bestimme den Schnittpunkt und den Winkel zwischen ... und ..."
Es gibt im wesentlichen 10 Aufgaben zu lösen, die sich in 6 Gruppen aufteilen lassen:
a) Gegeben sind zwei Punkte (Aufgabe 1)
b) Gegeben sind ein Punkt und eine Gerade (Aufgabe 2)
c) Gegeben sind ein Punkt und eine Ebene (Aufgabe 3)
d) Gegeben sind zwei Geraden (Aufgaben 4 – 6)
e) Gegeben sind eine Gerade und eine Ebene (Aufgaben 7 und 8)
f) Gegeben sind zwei Ebenen (Aufgaben 9 und 10)

Aufgabe 1: Abstand zweier Punkte

Bestimme den Abstand der beiden Punkte P(3 | 7 | 7) und Q(2 | 3 | –1).

Die folgende Anleitung gilt für alle Aufgaben:
Bevor du weiterliest, überlege dir zuerst, ob du die Aufgabe lösen kannst.
***Wenn dir die Lösung (oder zumindest der Lösungsweg) klar ist**, dann rechne die Aufgabe durch und vergleiche dein Ergebnis mit dem angegebenen Resultat. Du kannst dann deinen Lösungsweg noch mit der Musterlösung vergleichen.*
***Wenn dir nicht klar ist, wie du die Aufgabe lösen sollst**, dann lies weiter und arbeite die Musterlösung genau durch.*

Lösung zur Aufgabe 1:
Der Abstand der Punkte P und Q beträgt 9 [Einheiten].

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 1:
Wir berechnen die Länge (Norm) des Vektors, welcher vom Punkt P zum Punkt Q (oder umgekehrt) zeigt. Oder, anders formuliert:
Der Abstand der beiden Punkte ist die Länge des Differenzvektors.

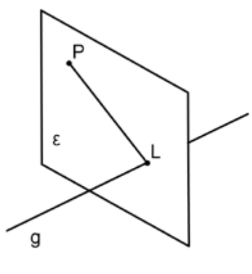
Zu Berechnen ist also $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}\right\|$ und das ergibt 9.

Aufgabe 2: Abstand eines Punktes von einer Geraden

Bestimme den Abstand des Punktes P(6 | 5 | 7) von der Geraden g: (2 | 3 | 2) (8 | –3 | 5).

Lösung zur Aufgabe 2:
Der Abstand beträgt 6.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 2:
Für die Aufgabe 2 gibt es zwei verschiedene Lösungswege.



Variante 1:
(empfehlenswert, wenn der Lotfusspunkt L gesucht ist)

a) **Lege von P aus die Normalebene auf g. Bezeichne diese Ebene mit ε.**
b) **Bestimme den Schnittpunkt (Lotfusspunkt) L = g ∩ ε.**
c) **Bestimme den Abstand von P zu L.**

Konkrete Durchführung der Berechnung:

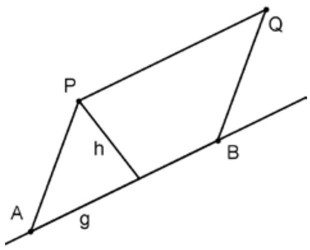
a) Wir schreiben g in Parameterform. $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir können den erhaltenen Richtungsvektor mit 3 kürzen. (Für die weiteren Berechnungen verwenden wir möglichst gekürzte Vektoren.)

Der Richtungsvektor von g ist gleichzeitig Normalenvektor von ε.
Wir erhalten somit die Koordinatengleichung von ε: $2x - 2y + z + d = 0$.
Wenn wir P(6 | 5 | 7) einsetzen, finden wir $d = -9$.
Somit lautet die Koordinatengleichung von ε: $2x - 2y + z - 9 = 0$.

b) Jetzt setzen wir die einzelnen Komponenten der Parametergleichung von g in der Ebenengleichung ein: $2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0$.
Wenn wir den aus der Gleichung ermittelten Wert $t = 1$ in die Parametergleichung von g einsetzen, erhalten wir den Lotfusspunkt L(4 | 1 | 3)

c) Der gesuchte Abstand ist $\left\|\overrightarrow{LP}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right\| = 6$.



Variante 2:
(empfehlenswert, wenn nur der Abstand gesucht ist)
Gegeben ist also die Gerade g: A(2 | 3 | 2) B(8 | –3 | 5).
Bestimme den Abstand von P(6 | 5 | 7) zu AB.

a) Bilde das Parallelogramm ABQP. Der Punkt Q wird für die weitere Rechnung nicht einmal benötigt.
b) Der gesuchte Abstand ist die Höhe h des Parallelogramms. Die Fläche ist die Länge des Kreuzproduktvektors, also $F = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right\|$ **und die Grundlinie ist** $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
c) Weil F = a·h gilt, ist $h = \dfrac{F}{a} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$

Konkrete Durchführung der Berechnung:
Das Einsetzen in der Formel ist reine Taschenrechnerbedienung. Wir erhalten $h = 6$.

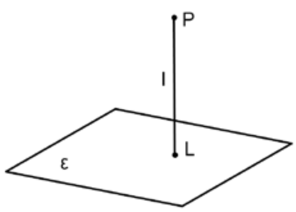
Aufgabe 3: Abstand eines Punktes von einer Ebene

Bestimme den Abstand des Punktes P(3 | 1 | –3) von der Ebene $2x - y + 2z - 17 = 0$.

Lösung zur Aufgabe 3:
Der Abstand beträgt 6.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 3:
Für diese Aufgabe gibt es auch wieder zwei verschiedene Lösungswege.

Variante 1:
Der folgende Lösungsweg führt zuerst zum Lotfusspunkt.



a) Bestimme das Lot l von P auf die Ebene ε.
b) Bestimme den Schnittpunkt (Lotfusspunkt) L = l ∩ ε.
c) Bestimme den Abstand von P zu L.

Konkrete Durchführung der Berechnung:
Der Normalenvektor der Ebene ist gleichzeitig Richtungsvektor des Lotes.

Also hat das Lot die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Alles in die Ebenengleichung eingesetzt ergibt $2(3 + 2t) - (1 - t) + 2(-3 + 2t) - 17 = 0$.
Die Gleichung ergibt $t = 2$ und somit $L(7 \mid -1 \mid 1)$.

Der Abstand beträgt $\left\| \overrightarrow{LP} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = 6$.

Variante 2:
Wenn nur der Abstand gesucht ist, dann gibt es folgende schnellere Version:

Setze P in die HNF der Ebene ε ein.

Wie das gemacht wird, sei nochmals kurz erklärt: Dividiere die Koordinatengleichung durch die Länge des Normalenvektors. Im Beispiel hat der Normalenvektor Länge 3 und das ergibt:
$\frac{2x - y + 2z - 17}{3} = 0$. Diese Gleichung heisst HNF von ε.
Wenn wir nun irgend einen Punkt **der Ebene** einsetzen, erhalten wir auf der linken Seite immer noch Null (denn die Gleichung der Ebene wurde nur durch eine Konstante dividiert).
Setzen wir aber nun irgend einen anderen Punkt des Raumes ein (beispielsweise P), so erhalten wir bis auf ein eventuelles Vorzeichen genau den Abstand von P zur Ebene.
(Der genaue Beweis dieser Tatsache wird in diesem Leitprogramm nicht geführt, er würde den Rahmen des Leitprogramms sprengen.)

$\frac{2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot (-3) - 17}{3} = -\frac{18}{3} = -6$. Somit beträgt der Abstand von P zur Ebene 6.

Aufgabe 4: Abstand zweier Parallelen

Bestimme den Abstand der beiden Parallelen g und h.
g: (3 | 4 | –1) (8 | 6 | –5)   h: (12 | 10 | 2) (2 | 6 | 10)

Weise nach, dass die Geraden wirklich parallel sind.

Lösung zur Aufgabe 4:
Der Abstand beträgt 9.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 4:
Zuerst weisen wir nach, dass die Geraden parallel sind, indem wir prüfen, ob die Richtungsvektoren kollinear sind. Wir schreiben die Geraden in Parameterform.

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ resp. $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Beachte, dass die Parameter verschieden sind, also beispielsweise t_1 und t_2.

Der Richtungsvektor von h ist das –2-fache des Richtungsvektors von g.
Weil wir jetzt wissen, dass die Geraden parallel sind, können wir auf h einen Punkt frei wählen [beispielsweise (12 | 10 | 2)] und dann den Abstand dieses Punktes zu g berechnen.
Wie das gemacht wird, steht bereits in Aufgabe 2.
Der Abstand beträgt 9.

Wir wählen einen Punkt auf der einen Geraden und berechnen dessen Abstand zur *anderen* Geraden.

Zusatzbemerkung: Wenn die Geraden zusammenfallen, dann können wir genau gleich vorgehen und erhalten im 2. Teil dieser Aufgabe den Abstand Null.

Aufgabe 5: Schneidende Geraden: Schnittpunkt und Zwischenwinkel

Gegeben sind zwei Geraden g: (5 | 3 | 1) (10 | 10 | 0) und h: (6 | 6 | 4) (9 | 11 | 5).
a) Weise nach, dass sich die Geraden schneiden und bestimme den Schnittpunkt.
b) Bestimme den Zwischenwinkel von g und h.

Lösung zur Aufgabe 5:
Der Schnittpunkt ist S(0 | –4 | 2)
und der Zwischenwinkel misst 16.98°.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 5:
Zuerst stellen wir die Parametergleichungen von g und h auf.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{resp. } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren nicht kollinear sind, sind die Geraden sicher nicht parallel.
Dann setzen wir die Geraden gleich, d.h. wir setzen die x- und die y-Komponenten der Parametergleichungen einander gleich.
Wir lösen also das Gleichungssystem
$5 + 5t_1 = 6 + 3t_2$
$3 + 7t_1 = 6 + 5t_2$
Die gefundenen Werte $t_1 = -1$ bzw. $t_2 = -2$ setzen wir in die Parametergleichungen ein.

Da wir auf beiden Geraden denselben Punkt S(0 | –4 | 2) erhalten, schneiden sich die Geraden in eben genau diesem Punkt.

Anders ausgedrückt:
Die Parameterwerte $t_1 = -1$, $t_2 = -2$ erfüllen alle drei Komponentengleichungen und somit schneiden sich die Geraden.

Der Zwischenwinkel zweier Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.

Den Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen wir mit $\cos(\gamma) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

Wir rechnen also $\cos(\gamma) = \dfrac{\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h}{\|\vec{r}_g\| \cdot \|\vec{r}_h\|}$ und erhalten $\gamma = 16.98°$.

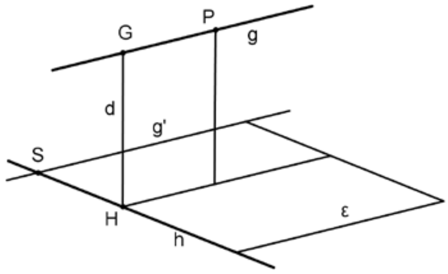
Aufgabe 6: Abstand zweier windschiefer Geraden

Bestimme den Abstand der beiden windschiefen Geraden
g: (–1 | 0 | 3) (–1 | 1 | 4) und h: (3 | 2 | 1) (9 | 1 | 3).

Diese Aufgabe ist wohl die schwierigste im ganzen Leitprogramm. Überlege trotzdem zumindest, wie du einen Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden definieren würdest.

Lösung zur Aufgabe 6:
Der Abstand misst 4.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 6:
Den kürzesten Abstand zweier windschiefer Geraden erhalten wir, indem wir auf g einen Punkt G und auf h einen Punkt H so bestimmen, dass die Verbindungsgerade d = GH sowohl zu g als auch zu h senkrecht steht. Der Abstand der Punkte G und H ist dann der Abstand der beiden windschiefen Geraden.



Die Gerade t heisst **Minimaltransversale** und ist relativ schwierig zu bestimmen. Daher betrachten wir vorerst nur den Abstand der beiden windschiefen Geraden **ohne** Berechnung der beiden am nächsten beieinander liegenden Punkte G und H.

Räumliches Vorgehen:
Zuerst verschieben wir die Gerade g parallel so, dass die verschobene Gerade g' und h sich schneiden. (In der Figur ist S deren Schnittpunkt.)
S ist ein **beliebiger** Punkt von h.
Im allgemeinen wird S *nicht* genau der Punkt H der Minimaltransversalen sein (ausser durch grossen Zufall). Wir müssen also annehmen, dass S ≠ H.

Die Geraden g' und h bilden dann eine Ebene ε.

Der gesuchte Abstand ist dann der Abstand von g zu ε, oder (noch einfacher): Wähle auf g einen Punkt (in der Figur ist das der Punkt P) und berechne den Abstand dieses Punktes zu ε.

Konkrete Durchführung der Berechnung:
Wir haben die beiden Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Von der Ebene ε kennen wir zwei Richtungsvektoren, nämlich die Richtungsvektoren von g und von h. Deren Vektorprodukt ist der Normalenvektor von ε.

Also haben wir $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Diesen Normalenvektor können wir noch kürzen.

Die Koordinatengleichung unserer Ebene ε lautet also x + 2y – 2z + d = 0.
Für den Punkt S wählen wir einen Punkt von h, beispielsweise (3 | 2 | 1). Wenn wir diesen Punkt einsetzen, erhalten wir die Koordinatengleichung von ε: x + 2y – 2z – 5 = 0.

Jetzt wählen wir einen Punkt von g, beispielsweise P(–1 | 0 | 3) und setzen diesen in die HNF von ε ein.

Die HNF lautet $\frac{x + 2y - 2z - 5}{3} = 0$

Wenn wir P in die HNF von ε einsetzen, dann erhalten wir –4, folglich beträgt der Abstand 4.

Aufgabe 7: Eine Ebene und eine Gerade parallel dazu

Gegeben ist die Gerade g: (7 | –1 | 3) (4 | –5 | 4) und die Ebene 4x – y + 8z – 8 = 0.
Zeige, dass g zur Ebene parallel liegt und berechne den Abstand von g zur Ebene.

Wie kann man nachweisen, dass die Gerade zur Ebene parallel liegt?

Lösung zur Aufgabe 7:
Der Abstand beträgt 5.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 7:
Zuerst versichern wir uns, dass die Gerade zur Ebene parallel liegt. Das können wir auf verschiedene Arten nachweisen, beispielsweise so: Der Richtungsvektor von g muss zum Normalenvektor der Ebene senkrecht stehen, also muss deren Skalarprodukt gleich Null sein.

Wir haben g : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es ist $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

Den Abstand der Geraden zur Ebene erhalten wir, indem wir einen Punkt von g wählen und dessen Abstand zur Ebene berechnen.

Wir setzen also (7 | –1 | 3) in die HNF: $\frac{4x - y + 8z - 8}{9} = 0$ ein und erhalten den gesuchten Abstand 5.

Zusatzbemerkung: Wenn g *in* der Ebene liegt, dann können wir genau gleich vorgehen und erhalten dann den Abstand Null.

Aufgabe 8: Eine Gerade und eine Ebene, die sich schneiden

Gegeben ist die Gerade g: (7 | –10 | 11) (4 | –6 | 4) und die Ebene 7x – 5y + 3z – 8 = 0.
Bestimme den Schnittpunkt und den Zwischenwinkel.

Wo ist der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene abzulesen?

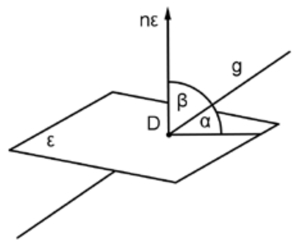
Lösung zur Aufgabe 8:
Der Schnittpunkt ist S(1 | –2 | –3)
und der Zwischenwinkel misst 52.29°.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 8:
Das Berechnen des Schnittpunktes ist eine rein technische Angelegenheit: Wir bestimmen die Parametergleichung von g und setzen alles in die Ebenengleichung ein.

$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und somit 7(7 – 3t) – 5(–10 + 4t) + 3(11 – 7t) – 8 = 0.

Das ergibt t = 2 und somit S(1 | –2 | –3).

Für den Zwischenwinkel benötigen wir eine Überlegungsfigur:



Gesucht ist der Winkel α zwischen g und der Ebene.
Es ist einfacher, den Winkel β zu berechnen und dann auf 90° zu ergänzen.
β ist der Winkel zwischen dem Richtungsvektor von g und dem Normalenvektor der Ebene.

Konkrete Durchführung der Berechnung:

Wir kennen den Richtungsvektor von g: $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor von ε : $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wir berechnen den Winkel zwischen dem Richtungsvektor von g und dem Normalenvektor der Ebene. $\cos(\beta) = \frac{\vec{r}_g \cdot \vec{n}_\varepsilon}{\|\vec{r}_g\| \cdot \|\vec{n}_\varepsilon\|}$. Das ergibt β = 142.29°.

In unserer Berechnung ist grösser als 90°, folglich ist α = β – 90° = 52.29°.

Aufgabe 9: Parallele Ebenen

Gegeben sind die Ebenen x – 2y + 2z – 3 = 0 und 2x – 4y + 4z + 3 = 0.
Zeige, dass die Ebenen parallel sind und berechne ihren Abstand.

Überlege: Weshalb sind diese Ebenen parallel?

Lösung zur Aufgabe 9:
Der Abstand beträgt 1.5.

Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 9:
Der Normalenvektor der 2. Ebene ist das doppelte vom Normalenvektor der ersten Ebene. Die beiden Normalenvektoren sind also kollinear. Damit sind die beiden Ebenen parallel.

Zum Berechnen des Abstandes wählen wir einen Punkt auf der einen Ebene und berechnen dessen Abstand zur anderen Ebene.

Den Punkt auf der ersten Ebene wählen wir möglichst einfach: beispielsweise (3 | 0 | 0).
Diesen Punkt setzen wir in die HNF der zweiten Ebene ein.

Die HNF lautet: $\frac{2x - 4y + 4z + 3}{6} = 0$.

Wenn wir jetzt x = 3, y = 0 und z = 0 setzen, erhalten wir sofort den gesuchten Abstand 1.5 .

Aufgabe 10: Sich schneidende Ebenen

Gegeben sind die Ebenen $x - y + z - 3 = 0$ und $2x + y - 3z - 3 = 0$.
Bestimme die Schnittgerade und den Zwischenwinkel.

Überlege, wie du einen Winkel zwischen zwei Ebenen definieren würdest.
Wenn du ein Heft auf den Tisch stellst und leicht öffnest, dann stellen die beiden Heftdeckel genau die beiden Ebenen dar.
Zum Berechnen von Schnittgerade und Zwischenwinkel benötigen wir die beiden Normalenvektoren.
Was kannst du über die Schnittgerade und die beiden Normalenvektoren sagen?

Lösung zur Aufgabe 10:

Die Schnittgerade hat die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

und der Zwischenwinkel misst 72.02°.

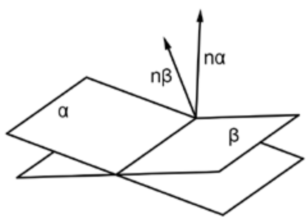
Lösungsweg (Musterlösung) zur Aufgabe 10:
Die Aufgabe besteht aus drei Teilen:

a) Der Richtungsvektor der Schnittgeraden steht auf beiden Normalenvektoren senkrecht. **Also ist der Richtungsvektor der Schnittgeraden das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren.**

b) **Einen Punkt der Schnittgeraden** erhalten wir, indem wir in den Ebenengleichungen (beispielsweise) $z = 0$ setzen. Räumlich gesehen bestimmen wir damit den Schnittpunkt der Schnittgeraden mit der xy-Ebene. In der xy-Ebene liegen alle Punkte mit $z = 0$.
Damit ist die Schnittgerade durch eine Punkt und ihre Richtung bestimmt.

c) **Der Winkel zwischen den Ebenen ist der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren.**

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$



Konkrete Durchführung der Berechnung:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt den Richtungsvektor der Schnittgeraden.

b) Wir setzen in beiden Ebenengleichungen $z = 0$. Das entstehende Gleichungssystem
$x - y - 3 = 0$
$2x + y - 3 = 0$
hat die Lösungen $x = 2$ und $y = -1$. Somit liegt $(2 \mid -1 \mid 0)$ auf der Schnittgeraden.

Damit ist die Schnittgerade vollständig bestimmt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Die Normalenvektoren können wir in die Gleichung einsetzen. Das ergibt $\gamma = 107.98°$.
Für den spitzen Zwischenwinkel ergänzen wir auf 180° und erhalten 72.02°.

Liebe Schülerin, lieber Schüler.

Wenn du das Leitprogramm bis hier durchgearbeitet hast, dann hast du den "obligatorischen" Teil der Abstands- und Zwischenwinkelprobleme behandelt. Bravo!

Zum Schluss folgen noch zwei Bemerkungen zu windschiefen Geraden.

Zusatzbemerkungen zu windschiefen Geraden

Zusatzbemerkung 1:
Man kann auch für windschiefe Geraden einen Zwischenwinkel definieren.

Bevor du weiterliest, überlege doch kurz, wie du einen Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden definieren würdest.

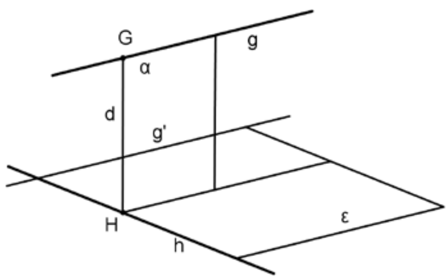
Es gibt drei Möglichkeiten:
a) Der Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden ist der Winkel, den die Geraden einschliessen, wenn man sie einzeln so parallel verschiebt, dass sie sich schneiden.
b) Der Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.
c) Der Winkel zwischen zwei windschiefen Geraden ist der Winkel zwischen ihren Normalebenen.

Rechnerisch gesehen ist die zweite Definition am einfachsten, denn dann müssen wir uns beim Winkel zwischen zwei Geraden nicht darum kümmern, ob sie sich schneiden oder windschief sind. Wir berechnen den Winkel mit der Formel $\cos(\gamma) = \dfrac{\vec{r}_g \cdot \vec{r}_h}{\|\vec{r}_g\| \cdot \|\vec{r}_h\|}$.

Für die beiden windschiefen Geraden aus Aufgabe 6 beträgt der Zwischenwinkel 83.66°.

Zusatzbemerkung 2:
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden g und h.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Bestimme die Koordinaten der beiden am nächsten beieinander liegenden Punkte.
Gesucht sind also die Punkte G auf g und H auf h mit kürzester Entfernung.

Vielleicht solltest du vor dem Weiterarbeiten die Aufgabe 6 nochmals durchlesen.

Die Verbindung von G und H heisst **Minimaltransversale** und steht senkrecht auf ε.
(Aus der Aufgabe 6 kennen wir die Koordinatengleichung von ε: $x + 2y - 2z - 5 = 0$.)

Wir bilden nun eine zweite Ebene α durch g, welche senkrecht auf ε steht.
Die Ebene α enthält also die Gerade g und den Normalenvektor von ε als weiteren Richtungsvektor.

$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Die Koordinatengleichung von α lautet $4x - y + z + 1 = 0$.

Der Punkt H ist der Schnittpunkt von h mit α.

Alles eingesetzt ergibt $4(3 + 6t_2) - (2 - t_2) + (1 + 2t_2) + 1 = 0$. Wir erhalten $t = -\frac{4}{9}$

Also $H\left(\frac{1}{3} \mid \frac{22}{9} \mid \frac{1}{9}\right)$

Jetzt müssen wir die Gerade d bilden. H ist ein Punkt von d, der Normalenvektor von ε ist die Richtung von d.

Also $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 22/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Der Punkt G ist der Schnittpunkt von g mit d.

(Übrigens schneiden sich g und d sicher, denn beide Geraden liegen in der Ebene α.)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 22/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die gefundenen Parameterwerte $t_1 = -\frac{2}{9}$ resp. $t_3 = -\frac{4}{3}$ werden in g oder d eingesetzt:

Folglich ist $G\left(-1 \mid -\frac{2}{9} \mid \frac{25}{9}\right)$.

Zum Schluss können wir den Abstand von G und H noch berechnen und erhalten 4, was mit dem Ergebnis aus Aufgabe 6 übereinstimmt.

****