

### 3. Lösen von quadratischen Gleichungen

#### 3.1. Die Mitternachtsformel

##### 1) Entdecken der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Mit dieser Reihe von Beispielen wird die Lösungsformel systematisch hergeleitet.

- a)  $(x - 3)^2 = 16$
- b)  $x^2 + 6x + 9 = 25$
- c)  $x^2 - 14x + 45 = 0$
- d)  $x^2 - 4x - 1 = 0$
- e)  $x^2 - 3x + 1 = 0$
- f)  $2x^2 + 10x + 11 = 0$
- g)  $4x^2 + x - 1 = 0$

##### 2) Die allgemeine Lösungsformel

Zu lösen ist die Gleichung  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Gleichung	nächster Rechnungsschritt
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$	$- c$
	$/a$
	quadratisches Ergänzen
	linke Seite als Binom schreiben, rechte Seite zusammenfassen
	auf beiden Seiten der Gleichung die Wurzel ziehen
	nach x auflösen
	zusammenfassen

##### 3) Die sogenannte "Mitternachtsformel"

Die Lösungen der quadratischen Gleichung  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  sind

.....  
 Diese Formel wird "Mitternachtsformel" genannt, weil es eine der wichtigsten Formeln der Mathematik ist und man sie selbst dann können sollte, wenn man um Mitternacht aus dem Schlaf geweckt wird.

**4) Übungen**

- a)  $x^2 - 6x + 4 = 0$   
 b)  $5x^2 = 4 + 8x$   
 c)  $9x^2 + 9x + \frac{1}{4} = 0$

**5) Musterbeispiele**

Löse die Gleichungen. Wie viele Lösungen gibt es jeweils?

- a)  $4x^2 - 25x + 25 = 0$   
 b)  $4x^2 - 20x + 25 = 0$   
 c)  $4x^2 - 15x + 25 = 0$

**6) Die Diskriminante**

Gegeben sei die quadratische Gleichung  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ .

Der Ausdruck  $D = b^2 - 4ac$  heisst .....

Zwischen der Anzahl Lösungen und der Diskriminante besteht ein Zusammenhang:

.....  
 .....  
 .....

**7) Bemerkung**

Das "blinde" Ausrechnen und Anwenden der Auflösungsformel ist nicht immer der schnellste Weg. Betrachte dazu die folgenden Beispiele:

a)  $x^2 - 6 = 0$

.....  
 .....

b)  $x^2 + 3x = 0$

.....  
 .....

c)  $(x + 3)(x - 4) = 0$

.....  
 .....

d)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

.....  
 .....  
 .....

**8) Freiwillige Übung**

- a)  $3x^2 + x - 2 = 0$   
 b)  $2x^2 - 1 - 3x = 0$   
 c) Löse mit quadratischem Ergänzen (ohne "Mitternachtsformel"):  $3x^2 - 4x - 2 = 0$   
 d) Wie viele Lösungen hat die Gleichung  $\sqrt{2} \cdot x^2 - 4x + \sqrt{8} = 0$ ?

### 3.2. Anwendungen mit quadratischen Gleichungen

#### 1) Gleichungen

Die folgenden Beispiele stehen als Muster für Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen.

a) Bruchterme: 
$$\frac{x+4}{3x+1} = \frac{x}{2x-1}$$

b) Gleichungen mit Quadratwurzeltermen: 
$$2 + \sqrt{2x-3} = x$$

Hinweis: .....

c) Parameter: 
$$x \cdot (x+t) = x+1$$

d) Gleichungssysteme: 
$$\left. \begin{array}{l} x+2y=7 \\ y=\frac{6}{x} \end{array} \right|$$

#### 2) Diskriminante

a) Löse die folgende Gleichung nach x auf.

b) Für welchen Wert des Parameters a hat die folgende Gleichung genau eine Lösung, und wie gross ist in diesem Fall x?

$$x^2 = 2 \cdot (x+a) - 6$$

.....  
 .....

#### 3) Substituieren

Manchmal kann es sich lohnen, einen komplizierten Ausdruck durch eine Variable zu ersetzen, damit die entstehende Gleichung einfacher wird.

a) Musterbeispiel: 
$$(2x-7)^2 + 10 \cdot (2x-7) + 21 = 0$$

b) Biquadratische Gleichungen: 
$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

#### 4) Zahlenrätsel

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 18, das Produkt 72. Wie lauten die Zahlen?

b) Welche Zahl ist um  $\frac{3}{4}$  grösser als ihre Quadratwurzel?

#### 5) Geometrische Anwendungen

a) Ein Passfoto von 2 cm Breite und 3 cm Höhe ist von einem Rahmen konstanter Breite eingerahmt. Wie breit ist der Rahmen, wenn Rahmen und Bild gleiche Fläche haben?

b) In einem rechtwinkligen Dreieck von 40 cm Umfang ist die Hypotenuse 2 cm länger als eine Kathete. Wie lang ist die Hypotenuse?

#### 6) Freiwillige Übung

a) Löse die Gleichung 
$$\frac{3x+10}{3} = \frac{x+2}{x}$$

b) Bestimme die Lösungsmenge: 
$$\sqrt{2x+1} = 2x-5$$

c) Löse nach x auf: 
$$x^2 = 2 \cdot t \cdot x - 8 \cdot t + 4 \cdot x$$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung 
$$p \cdot (x^2 - x) = 2$$
 genau eine Lösung und wie gross ist in diesem Fall x?