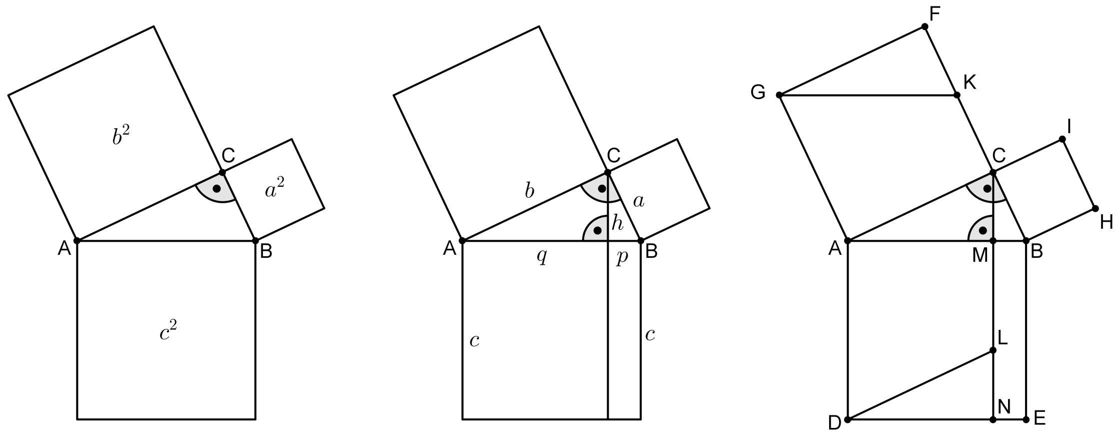
Beweis des Kathetensatzes

1. **Pythagoras-Figur**

   Wir beginnen mit einer Pythagoras-Figur, d.h. einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Quadraten über den Katheten sowie über der Hypotenuse. (Figur links)
   Die Höhe h auf die Hypotenuse (Figur Mitte) unterteilt diese in zwei Hypotenusenabschnitte p und q. Die Verlängerung der Höhe unterteilt das Hypotenusenquadrat in zwei Rechtecke. Wir werden in diesem Text zeigen, dass jedes Kathetenquadrat zum betreffenden Rechteck flächengleich ist. b^2 hat gleiche Fläche wie das Rechteck mit den Seiten c und q, a^2 hat gleiche Fläche wie das Rechteck mit den Seiten c und p.
   Anders ausgedrückt: Wir werden beweisen, dass $a^2 = p \cdot c$ bzw. $b^2 = q \cdot c$.



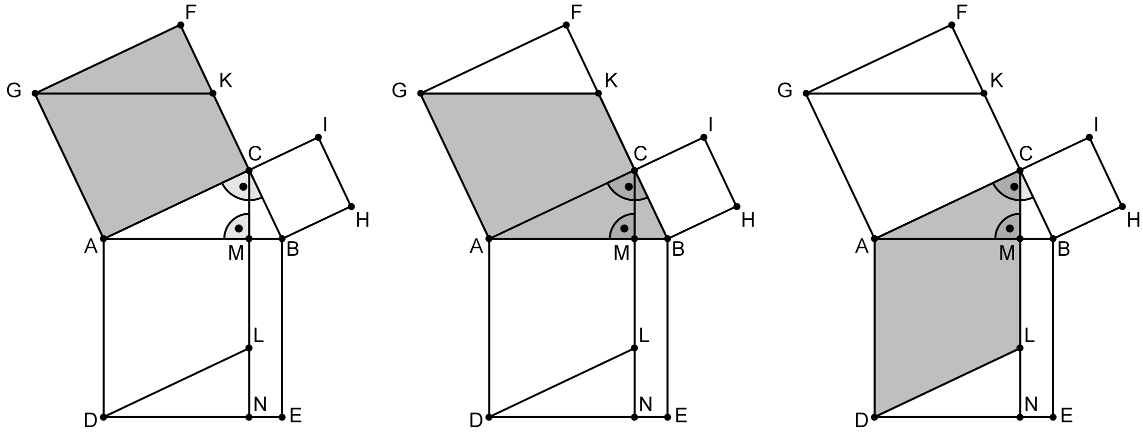
   Zum Beweis benötigen wir in der Pythagoras-Figur zwei zusätzliche Hilfslinien: In der Figur rechts ist die Strecke GK parallel zur Hypotenuse AB, die Strecke DL parallel zur Kathete AC. Die Strecke CL steht senkrecht zur Hypotenuse und ist folglich auch parallel zu AD und BE.

   Bemerkungen Die Beschriftung der Hypotenusenabschnitte ist alphabetisch geordnet, d.h. der Hypotenusenabschnitt p gehört zur Kathete a, der Hypotenusenabschnitt q gehört zur Kathete b.
   Und weiter ist die Bezeichnung h logisch, denn nur die Höhe auf die Hypotenuse liegt im Innern des rechtwinkligen Dreiecks. Somit reicht die Bezeichnung h und es ist nicht nötig, h_c zu schreiben.

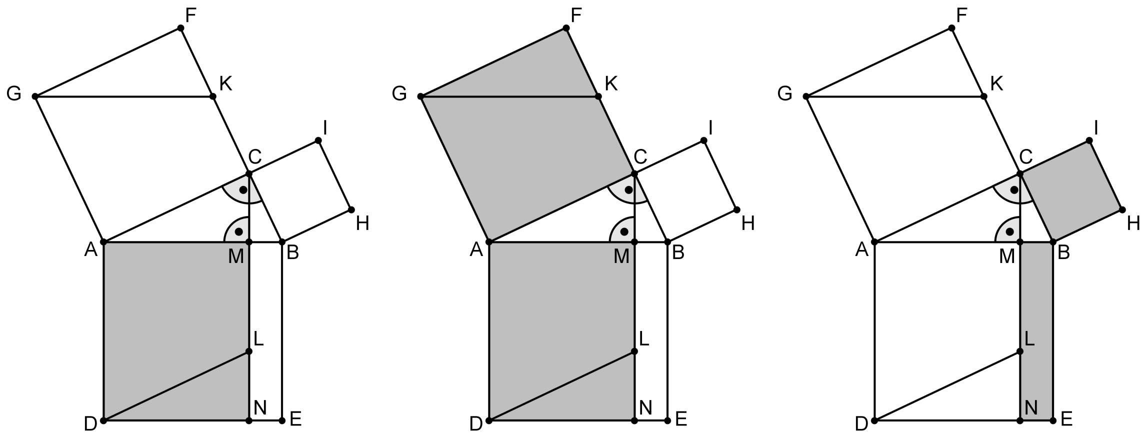
   Nach diesen Vorbereitungen können wir den Beweis durchführen. Wir werden also nachweisen, dass $b^2 = q \cdot c$ ist und starten dazu mit dem Kathetenquadrat $ACFG$ (siehe zweite Seite).

2. **Umwandlung**

Wir starten mit dem Kathetenquadrat $ACFG$ (Figur links). Dieses werden wir nun umwandeln, wobei wir stets darauf achten, dass die Fläche erhalten bleibt.
Das Parallelogramm $ABKG$ (Figur Mitte) hat gleiche Fläche wie das Kathetenquadrat $ACFG$. Man kann das auf zwei Arten begründen: Einerseits kann man das Dreieck GKF vom Kathetenquadrat wegschneiden und als Dreieck ABC wieder anfügen. Andererseits haben das Kathetenquadrat und das Parallelogramm gleiche Grundlinie (nämlich AG) und gleiche Höhe (nämlich AC) und sind somit flächengleich.



Das Parallelogramm $ABKG$ wird nun um den Punkt A um $90°$ im Uhrzeigersinn gedreht. So entsteht das Parallelogramm $ADLC$, (Figur rechts) welches logischerweise auch gleiche Fläche hat wie das Kathetenquadrat, von dem wir ausgegangen sind.
Das Parallelogramm $ADLC$ hat nun seinerseits gleiche Fläche wie das Rechteck $ADNM$ (Figur unten links). Wiederum kann man entweder das Dreieck AMC oben wegschneiden und unten als Dreieck DNL hinzufügen; oder man sieht, dass das Parallelogramm $ADLC$ und das Rechteck $ADNM$ gleiche Grundlinie (nämlich AD) und gleiche Höhe (nämlich AM) haben.



Somit haben wir nachgewiesen, dass das Kathetenquadrat über AC gleiche Fläche hat wie das Rechteck $ADNM$ (Figur Mitte). Analog beweist man, dass das Kathetenquadrat $CBHI$ gleiche Fläche hat wie das Rechteck $BMNE$ (Figur rechts). Das ist der Kathetensatz von Euklid:
In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Kathetenquadrat gleiche Fläche hat wie das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt. In Zeichen: $a^2 = p \cdot c$ **und** $b^2 = q \cdot c$**.**