2. Wurzeln

2.1. Rechnen mit Wurzeln

1. **Beispiel**
   Löse die Gleichung $8^n = 16$.

   Bis hier war nicht festgelegt, was eine Potenz ist, wenn der Exponent keine rationale Zahl mehr ist. Das soll sich nun ändern.

2. **Satz**

   ....

   Beweis

3. **Satz**
   Den obigen Satz können wir direkt verallgemeinern:

   ....

   Beweis

4. **Bemerkung**

Es ist naheliegend, festzulegen, dass alle Potenzgesetze auch für rationale Exponenten gelten. Das beweisen wir aber nicht.

Zusätzlich gilt: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ und somit $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$.

Im Ausdruck $\sqrt[n]{x}$ heisst n auch **Wurzelexponent**.

5. **Potenzgesetze anwenden**

Schreibe als Potenz:

a) $\sqrt[5]{a^2} =$ ....

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a} =$ ....

c) $\sqrt[5]{\sqrt{a}} =$ ....

d) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{a^2}} =$ ....

e) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b} =$ ....

6. **Musterbeispiele**

Forme die Ausdrücke um. Suche, wenn sinnvoll, mehrere Möglichkeiten.

a) $\sqrt[5]{s^3} =$ ....

b) $m^{\frac{3}{4}} =$ ....

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} =$ ....

d) $t^{-\frac{1}{5}} =$ ....

e) $h^{-\frac{5}{4}} =$ ....

f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} =$ ....

g) $\sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{n} =$ ....

h) $\left(\sqrt[4]{m}\right)^6 =$ ....

i) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} =$ ....

j) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^{-9} =$ ....

k) $\sqrt[5]{y^4} : y^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{y^3} =$ ....

7. **Potenzen mit reellen Exponenten**

Es ist naheliegend, festzulegen, dass alle Potenzgesetze weiter gelten, wenn die Exponenten reelle Zahlen sind.
Allerdings kann man einen Ausdruck wie $x^{\sqrt{3}}$ nicht mehr einfach erklären.

8. **Beispiele**

a) $\left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{18}} =$ ....

b) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{18}} =$ ....

Lernkontrolle

Vereinfache oder schreibe auf verschiedene Arten:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{a}} =$

b) $\sqrt[5]{m^{-3}} =$

c) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^4}} =$

d) $\sqrt[12]{a} \cdot \sqrt[6]{a} =$

e) $\left(\sqrt[4]{a} : \sqrt[5]{a}\right) : \sqrt[8]{a} =$

f) $\sqrt[4]{a^5} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{a^5} =$

2.2. Gleichungen

1. **Bemerkung**

   Die (beispielsweise) vierte Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert, die dritte Wurzel hingegen schon. Bei Ausdrücken der Art $\sqrt[m]{x^n}$ wird es ziemlich mühsam. Deshalb legen wir fest, dass für alle Radikanden nur positive Werte zugelassen sind.

2. **Gleichungen mit unbekannter Basis**

   a) $\sqrt[3]{x} = 6$

   b) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$

3. **Exponentialgleichungen**

   a) $32 = 4^x$

   b) $3^{2x+1} = 81$

   c) $5^x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$

4. **Zwei Beispiele, die relativ ähnlich aussehen**

   a) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x$

   b) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

5. **Anwendung**

   Das Verhältnis der Oberflächen zweier Würfel beträgt 3 : 4.
   Berechne das Verhältnis ihrer Seitenkanten sowie das Verhältnis ihrer Volumen.

Übungen für Schnellrechner

Löse die Gleichungen

a) $x^4 = (\sqrt{5})^3$

b) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{6}{\sqrt[6]{x}}$

c) $3^{\sqrt{2}} = 9^{x+1}$

d) $16^x \cdot 2^4 = 2^x$

e) $16^x + 2^4 = 10 \cdot 4^x$