

Potenzen und Wurzeln

1. Potenzen

1.1. Potenzgesetze

1. Einführungsbeispiele

- a) Wie lange braucht das Licht von der Sonne, bis es an der Erde ankommt? Die Entfernung der Erde von der Sonne wird mit 1.5×10^{11} m angegeben und die Lichtgeschwindigkeit beträgt 3×10^8 m/s.
- b) Wie viele Wassermoleküle H_2O hat es in einem Liter Wasser? 1 mol Wasser wiegt 18.02 g . Und 1 mol enthält 6.02×10^{23} Wassermoleküle.
Vereinfachend nehmen wir an, dass ein Liter Wasser genau 1 kg wiegt.

2. Definition

x^n mit $n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

.....

x heisst

n heisst

x^1

3. Rechengesetze (gleiche Basis)

a) $x^5 \cdot x^3 = \dots$ und allgemein

.....

.....

.....

b) $\frac{x^5}{x^3} = \dots$ und allgemein

.....

.....

.....

c) $(x^5)^3 = \dots$ und allgemein

.....

.....

.....

4. Rechengesetze (gleiche Exponenten)

a) $x^5 \cdot y^5 = \dots\dots$ und allgemein $\dots\dots\dots$

 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

b) $\frac{x^5}{y^5} = \dots\dots$ und allgemein $\dots\dots\dots$

 $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$ $\dots\dots\dots$

5. Musterbeispiele

Forme die Ausdrücke um. Suche, wenn sinnvoll, mehrere Möglichkeiten.

a) $a^3 \cdot a^8 \cdot a = \dots\dots\dots$

b) $6^n \cdot 6^{n+1} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{s^{32}}{s^8} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{5^n}{5^3} = \dots\dots\dots$

e) $m^8 \cdot n^8 = \dots\dots\dots$

f) $5^n \cdot 3^n \cdot 2^n = \dots\dots\dots$

g) $\frac{t^8}{s^8} = \dots\dots\dots$

h) $\frac{2^{n+3}}{6^{n+3}} = \dots\dots\dots$

i) $(2x^4)^5 = \dots\dots\dots$

j) $8 \cdot 2^n = \dots\dots\dots$

k) $4^n \cdot 2^{3n} = \dots\dots\dots$

l) $6 \cdot 3^n + 3^{n+1} = \dots\dots\dots$

6. **Vorzeichen!**

a) Vergleiche: $(-2)^4 = \dots\dots\dots$ und $-2^4 = \dots\dots\dots$

.....

b) Ebenso: $(-3)^3 = \dots\dots\dots$ und $-3^3 = \dots\dots\dots$

c) Beachte:

$(-1)^n = \dots\dots\dots$

.....

7. **Übungen**

a) $(-3a^2b)^4 = \dots\dots\dots$

b) $(-(3a)^2b)^3 = \dots\dots\dots$

8. **Positiv oder negativ**Für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$ wird der Ausdruck positiv, für welche negativ?

a) $(-3)^{n+7} = \dots\dots\dots$

b) $(-2)^{2n+1} = \dots\dots\dots$

Freiwillige Übung

Schreibe ohne Klammern.

a) $(2 \cdot a \cdot b)^3 =$

b) $(3a)^n =$

c) $(-3a)^2 b^4 =$

d) $((-3a)^2 b)^3 =$

1.2. Gleichungen mit Potenzen

1. Die Unbekannte steht in der Basis

- a) $x^3 = 216 = 6^3$
-
-
- b) $x^6 = 64 = 2^6$
-
-
-
- c) $x^2 = -4$
-
- d) $x^5 = -32$
-

2. Übungen

Löse die Gleichungen

- a) $5 + 4x^3 = 113$
- b) $7 - 6 \cdot x^4 = 5 \cdot x^4 - 13^2$
- c) $\frac{2^3 - x^5}{2^2} = 10$



Für Schnellrechner

$$5 \cdot x^3 = 135$$

$$3 \cdot x^4 = x^4 + 2^5$$

3. Exponentialgleichungen

a) $3^x = 81$

.....

b) $9^5 = 3^{x-5}$

.....

4. Argumentvergleich

Damit ein Argumentvergleich möglich ist,

.....

5. Übungen

Löse die Gleichungen

a) $5^3 + 2^x = 157$

b) $3 \cdot 2^x = 120 - 6 \cdot 2^{x+1}$

c) $3 \cdot 4^x = 6 \cdot 2^{x+5}$



Für Schnellrechner

$$2^4 + 9 \cdot 3^x = 7 + 4 \cdot 3^{x+1}$$

$$8^{x+1} \cdot 2^{x-1} = 4^{x+5}$$

$$9 \cdot 3^x = 27 \cdot 9^{x-2}$$

1.3. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1. Exponent Null

$x^0 =$

.....

aber $0^0 =$

2. Erweiterung des Potenzbegriffs

Was ist x^{-3} ? Wir verwenden ein Potenzgesetz.

3. Potenzgesetz für negative Exponenten

.....

.....

4. Wichtige Umformungen

5. Satz

.....

.....

.....

6. Kopfrechnen

7. **Musterbeispiele**

Forme die Ausdrücke um. Suche, wenn sinnvoll, mehrere Möglichkeiten.

a) $a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a = \dots\dots\dots$

b) $6^{2n} \cdot 6^{1-n} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{s^{-9}}{s^{-3}} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{4^{-2}}{4^m} = \dots\dots\dots$

e) $m^{-5} \cdot n^{-5} = \dots\dots\dots$

f) $5^{3-n} \cdot 3^{3-n} = \dots\dots\dots$

g) $\frac{t^{-8}}{s^{-8}} = \dots\dots\dots$

h) $\frac{2^{n-3}}{6^{n-3}} = \dots\dots\dots$

i) $(2x^{-4})^{-6} = \dots\dots\dots$

j) $(x^{-3} \cdot x^{-5})^{-2} = \dots\dots\dots$

k) $\frac{x^{n-5}}{x^{2n-3}} = \dots\dots\dots$

l) $\frac{9^n}{3^{n-1}} = \dots\dots\dots$

8. **Übungen**

Schreibe ohne Klammern:

a) $(3 \cdot e \cdot f)^{-3} = \dots\dots\dots$

b) $(-3a)^{-2} b^{-4} = \dots\dots\dots$

c) $((2x)^{-2} \cdot x^{-4})^{-3} = \dots\dots\dots$

Für Schnellrechner

Vereinfache so weit als möglich:

a) $3^{-3} : 3^t \cdot 3^{-2}$

b) $(3x)^{-n} \cdot (2x)^n$

9. Zehnerpotenzen

a) $10^3 = \dots\dots\dots$

b) $10^9 = \dots\dots\dots$

c) $10^{-6} = \dots\dots\dots$

d) $10^{-9} = \dots\dots\dots$

10. Rechnen mit Zehnerpotenzen

a) $5 \times 10^{-4} \cdot 2 \times 10^{-3} = \dots\dots\dots$

b) $(5 \times 10^{-4}) : (2 \times 10^{-3}) = \dots\dots\dots$

c) $5 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-3} = \dots\dots\dots$

d) $5 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-3} = \dots\dots\dots$

**Für Schnellrechner**

$3 \times 10^{-5} \cdot 8 \times 10^3 =$

$3 \times 10^{-5} : 8 \times 10^3 =$

$$\frac{16 \times 10^{-6} \cdot 3 \times 10^{-8}}{12 \times 10^{-11}} =$$

1.4. Gleichungen mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1. Die Unbekannte steht in der Basis

a) $x^3 = 27^{-2}$

b) $x^{-5} = 32$

c) $x^{-4} = \frac{16}{81}$

d) $x^{-2} = 9 \times 10^{-12}$



2. Exponentialgleichungen

a) $3^{x-5} = 3^2$

b) $2^4 + 3^{5-x} = 5^2$

c) $2^{-3} \cdot 2^{2-x} = 2^{-5}$

d) $2^x \cdot 8^3 = 4^{x-1} \cdot 16$



3. **Knacknuss**

$$4^x + 2^5 = 12 \cdot 2^x$$

**Lernkontrolle**

Löse die Gleichungen

a) $3 \cdot x^{-2} = 12$

b) $3 + x^{-2} = 12$

c) $2^{x-8} \cdot 32 = 4^x$

d) $3^x = 81 \cdot 3^{-x}$

e) $3^x + 3^{3-x} = 12$