5. Logarithmen

5.1. Rechnen mit Logarithmen

1) Beispiel

a) Gesucht ist die Lösung der Gleichung $2^x = 3$. Mit den bisherigen Kenntnissen kann man allerhöchstens Näherungslösungen durch Probieren ermitteln.

b) Eine Bakterienkultur nimmt jedes Jahr um 5% zu. Wie lange geht es, bis die Population verdoppelt wird?

....

Diese Gleichung muss nach einem Exponenten aufgelöst werden, aber ein Argumentvergleich wird sicher nicht möglich sein.

2) Definition

....

....

....

3) Logarithmen

Mit diesen Beispielen wollen wir uns mit Logarithmen etwas vertraut machen.

a) $\log_5(125) =$ b) $\log_3(81) =$ c) $\log_2(32) =$ d) $\log_7(7) =$

e) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) =$ f) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$ g) $\log_6\left(\sqrt{6}\right) =$ h) $\log_9(1) =$

i) $\log_{10}(0.001) =$ j) $\log_5(-5) =$ k) $\log_5(0) =$ l) $\log_9(3) =$

4) Musterbeispiele

Bestimme x. Alle Basiswerte sollen positiv sein.

a) $\log_4(x) = 3$ b) $\log_8(x) = \frac{1}{3}$ c) $\log_x(27) = 3$ d) $\log_x(2) = \frac{1}{4}$

e) $\log_x(16) = -2$ f) $\log_{64}(4) = x$ g) $\log_8(4) = x$ h) $\log_9\left(\frac{1}{3}\right) = x$

5) Beispiele in allgemeiner Form

a) $\log_a(a) =$ b) $\log_a(a^3) =$ c) $\log_a(a^n) =$ d) $\log_a\left(\frac{1}{a}\right) =$

e) $\log_a\left(\frac{1}{a^m}\right) =$ f) $\log_a\left(\sqrt{a}\right) =$ g) $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right) =$ h) $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right) =$

i) $\log_a(1) =$

6) Zwei spezielle Basiswerte

Wenn beim Logarithmus keine Basis steht, dann gilt der Basiswert 10.

Es gilt $\log(z) = \log_{10}(z)$.

Ein weiterer Basiswert ist später wichtig. ln(z) steht für den natürlichen Logarithmus von z und in diesem Fall ist der Basiswert die Eulersche Zahl e. $e \cong 2.718281828...$

Es gilt $\ln(z) = \log_e(z)$.

7) Taschenrechner

Für die Logarithmen zu den Basiswerten 10 und e (d.h. für den natürlichen Logarithmus) hat es auf dem Rechner eine Taste.

a) log(13) = ... b) ln(7) = ...

c) log(0.02) = ... d) ln(14.78) = ...

e) $\ln(e^2)$ = ... f) log(1'000'000) = ...

8) Gesetz I

a) Berechne log(2) + log(5) = ...

b) Vermutetes Gesetz: ....

c) Beweis:

....

....

....

9) Gesetz II

a) Berechne log(20) – log(5) = und vergleiche mit log(...) = ...

b) Vermutetes Gesetz: ....

c) Beweis:

....

....

....

10) Gesetz III

a) Berechne 5 log(2) = ... und log(32) = ...

b) Vermutetes Gesetz: ....

c) Beweis:

....

....

....

11) Umformen von Logarithmentermen

a) Zerlege mit Hilfe der Logarithmen-Gesetze: $\log\left(x \cdot y^4\right) =$

b) Ebenso: $\log\left(\dfrac{3a^4 \cdot \sqrt{b}}{5c \cdot \sqrt[3]{d}}\right) =$

c) Schreibe als einen Logarithmus: $\log(a) + 3 \cdot \log(b) - 5 \cdot \log(c) =$

d) Ebenso: $\dfrac{1}{4} \cdot \log(x) - \dfrac{2}{3} \cdot \log(y) - \dfrac{5}{2} \cdot \log(z) =$

e) Vereinfache: $\log(\sqrt[3]{x}) - \log(\sqrt{x}) + \log(\sqrt[6]{x}) =$

f) Ebenso: $\log(a^2 - 4) - \log(a + 2) - \log(3a - 6) =$

---

12) Freiwillige Übung

a) $\log_3(243) =$

b) $\log_6(12) + \log_6(3) - \log_6(9) = \log_6(?)$

c) Zerlege so weit als möglich. $\log\left(4p^5 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{5q \cdot \sqrt[5]{r}}\right) =$

d) Schreibe als einen Logarithmus. $2 \cdot \log(a) + \dfrac{3}{2} \cdot \log(b) - \dfrac{1}{4} \cdot \log(c) =$

e) Vereinfache. $\dfrac{1}{4} \cdot \log(x) - \log(x^2) + \dfrac{7}{2} \cdot \log(\sqrt{x}) =$

5.2. Gleichungen

1) Beispiel

Jetzt können wir die Lösung der Gleichung $2^x = 3$ herleiten:

a) ....

b) ....

c) ....

Wir erhalten also die Formel: ....

2) Basiswechsel

Mit der Herleitung von Punkt 1) können wir nun von jeder Logarithmus-Basis zu jeder anderen Basis wechseln.

....

3) Exponentialgleichungen

Löse nach x auf:

a) $4^x = 22$

b) $0.86^x = 37.2$

c) $100^x = 0.00001$

d) $e^x = 10$

4) Exponentialgleichungen

Berechne x:

a) $5 \cdot 3^x + 13 = 28$

b) $3 \cdot 2^x = 12 - 5 \cdot 2^x$

c) $2 \cdot 1.3^x = 3 \cdot 1.8^x$

d) $4^{x+1} = 52 - 4^x$

e) $7^{3-x} = 12$

f) $2^{\frac{3}{x+4}} = 32$

g) $5^x = 6^{2x+1}$

h) $e^x = \frac{10^x}{e}$

i) $4^x + 2^x = 10$

j) $e^{2x} + 24 = 10 \cdot e^x$

5) Gleichungen mit Logarithmen

a) $1 + 3 \cdot \log_4(2x+3) = 25$

b) $\ln(x+5) = -2$

c) $\log_5(3) + \log_5(x+4) = \log_5(x)$

d) $\log_2(x) + \log_2(x-5) = \log_2(8-3x)$

---

6) Freiwillige Übung

Löse die Gleichungen

a) $4 \cdot 1.04^x = 5 \cdot 1.05^x$

b) $6^{5x-4} = 3^{2x-1}$

c) $\log_4(5) + \log_4(2x+3) = 2$

d) $\log_7(5x-2) - \log_7(x) = \log_7(6-x)$

5.3. Anwendungen

1) Bakterienkultur
Eine Bakterienkultur nimmt jedes Jahr um 5% zu. Wie lange geht es, bis die Population verdoppelt wird?

2) Radioaktivität
Die Strahlung eines Elementes betrage zu Beginn 10000 Einheiten. Man weiss, dass die Halbwertszeit 4 Tage dauert. In welcher Zeit fällt die Intensität auf weniger als 50 Einheiten zusammen?

3) Zahlenspielereien
a) Aus wie vielen Ziffern besteht die Zahl 9^{99}?
b) Ohne Taschenrechner: In der Gleichung log(87654.32) = 4 9 4 2 7 7 3 ist im Ergebnis das Dezimalzeichen verloren gegangen. Setze es an der richtigen Stelle ein.
c) Ohne Taschenrechner: Wie gross ist log(123456.789) ungefähr?

4) Degressive Abschreibung
Der Wert einer Maschine betrug am 1. 1. 1995 genau 25'340 Fr., am 1. 1. 1988 wurde sie noch mit 44'200 Fr. verbucht.
a) Wie gross ist die jährliche Abschreibung in %?
b) Zu welchem Preis wurde die Maschine am 1. 1. 1982 gekauft?
c) Wann sinkt ihr Wert zum ersten Mal unter 10'000 Fr. ?

5) Zinseszins
Mr X hat 12'000.– zu 2.25 % angelegt, Mr Y hat 13000.– zu 1.75 % angelegt.
Wie lange dauert es, bis die beiden Kapitalien gleich sind?

6) Kaffeetasse
Die Temperatur T von Kaffee kann durch die Zeit t beschrieben werden durch die Gleichung $T = a \cdot b^t + c$. Zur Zeit $t = 0$ sei der Kaffee 75° warm, nach einer Minute noch 57° und nach 2 Minuten noch 45° warm.
a) Bestimme a, b, c.
b) Wie warm ist es in dem Raum, in dem die Kaffeetasse steht?
c) Wie kalt ist der Kaffee nach 5 Minuten?
d) Wann muss man den Kaffee trinken, wenn er 42° warm sein soll?

---

7) Freiwillige Übung
Eine Aktie hat am 1. 1. 2000 einen Wert von 236.50 Fr. Der Wert nimmt während 5 Jahren stets um 4% pro Jahr zu. Ab dem 1. 1. 2005 nimmt aber der Wert stets um 3% pro Jahr ab. In welchem Jahr wird der ursprüngliche Wert von 236.50 Fr. wieder unterschritten?

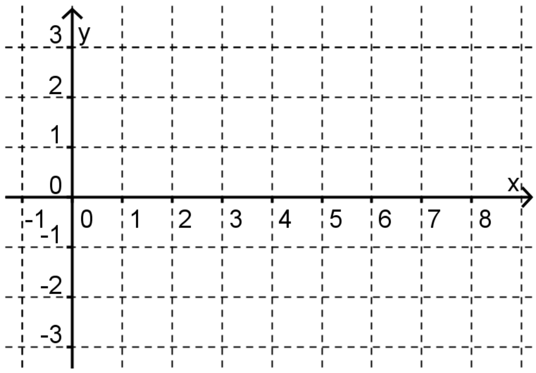
5.4. Logarithmusfunktionen

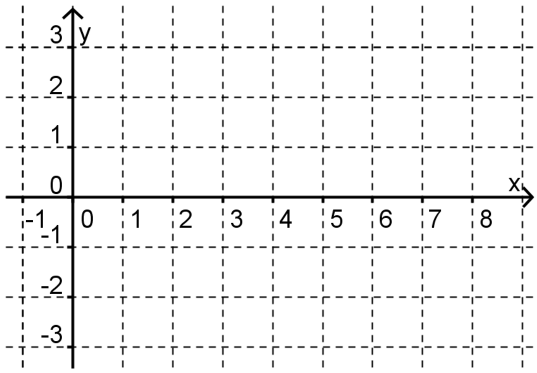
1) Beispiele

Bestimme die Funktionsgraphen zu $y = \log_2(x)$ und $y = \log_3(x)$

x =	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y =									

x =	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y =									





Feststellungen: ....

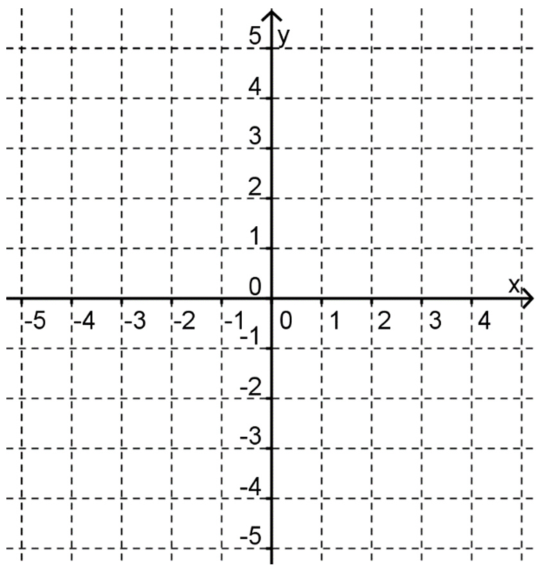
....

....

2) Logarithmus- und Exponentialfunktion

Welches ist der Zusammenhang zwischen einer Exponentialfunktion $y = b^x$ und der Logarithmusfunktion mit gleicher Basis, $y = \log_b(x)$?

Betrachte $y = 2^x$ und $y = \log_2(x)$.



....

....

....

....

....

---

3) Freiwillige Übung

Skizziere die Funktion $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$