

4. Exponentialfunktionen

4.1. Graphen von Exponentialfunktionen

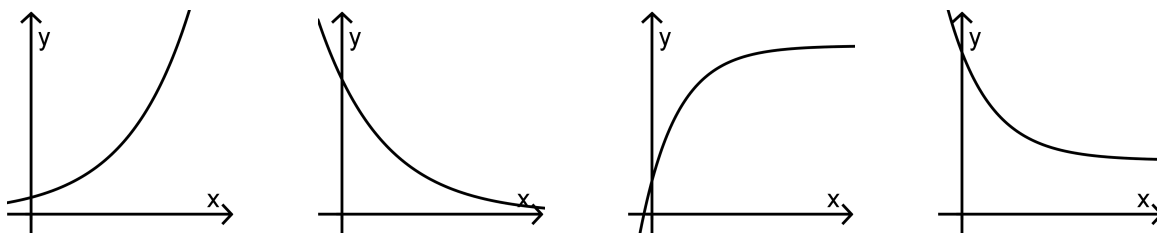
1. Einführung

Viele Prozesse aus Natur und Technik verlaufen exponentiell.

- Die Intensität radioaktiver Strahlung verläuft exponentiell abnehmend. Die Halbwertszeit ist die Zeit, in welcher die Strahlung halbiert wird.
- Die Temperatur von heissem Kaffee in einer Tasse wird sich exponentiell der Raumtemperatur annähern. Der Kaffee wird kälter, aber logischerweise nie kälter als die Umgebungstemperatur.
- Wenn sich Bakterien (uneingeschränkt) vermehren können, dann wird sich die Anzahl Bakterien exponentiell entwickeln. Ähnliches kann man beobachten, wenn sich Algen in einem Teich ausbreiten.
- Ein Guthaben, welches immer zu gleichem Zins angelegt ist, wird exponentiell zunehmen.

2. Gestalt von Exponentialfunktionen

Welche praktische Anwendung gehört zu welchem Funktionsgraphen?

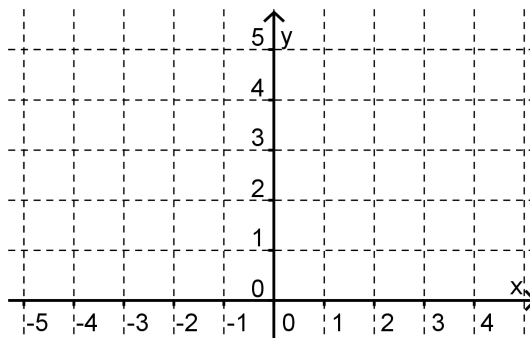
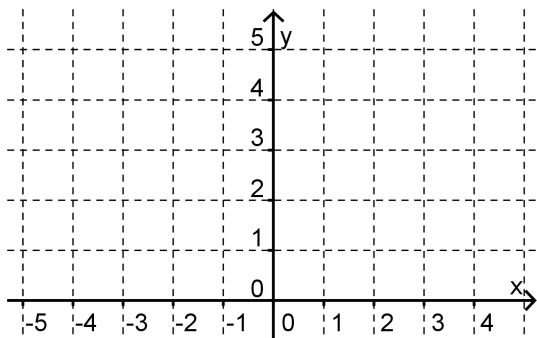


3. Grundsituation von Exponentialfunktionen

Wir zeichnen die vier Funktionsgraphen zu $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$ und $y = (\frac{1}{3})^x$ auf und erstellen dazu zuerst eine Wertetabelle.

$x =$	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = 2^x$									
$y = 3^x$									
$y = (\frac{1}{2})^x$									
$y = (\frac{1}{3})^x$									

Zeichne dann die Funktionsgraphen zu $y = 2^x$ und $y = 3^x$ ins linke, die Graphen zu $y = (\frac{1}{2})^x$ und $y = (\frac{1}{3})^x$ ins rechte Koordinatensystem ein.



4. **Feststellungen**

Für die Basis b betrachten wir nur positive Werte, d.h. wir setzen $b > 0$. Für negative Basiswerte hat man ziemlich schnell undefinierte Funktionswerte. So ist beispielsweise $(-2)^{0.5} = \sqrt{-2}$ nicht definiert. Und vernünftigerweise ist $b \neq 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

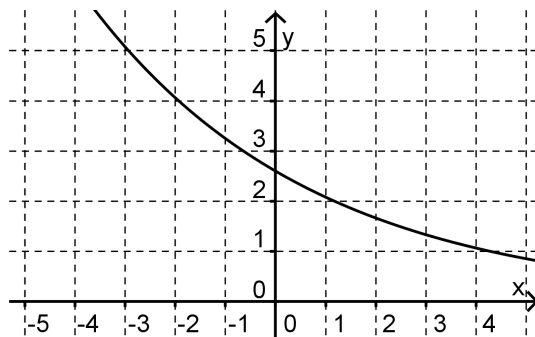
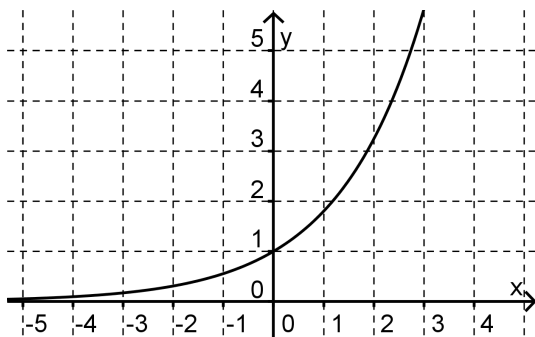
5. **Eine wichtige Eigenschaft von Exponentialfunktionen**

Die folgende Feststellung ist für Exponentialfunktionen entscheidend, ja sie charakterisiert die Exponentialfunktionen:

Betrachte einen beliebigen Funktionswert $y = f(x_0)$ an einer Stelle x_0 . Wenn man jetzt auf der x-Achse um genau eine Einheit nach rechts geht, dann wird der Funktionswert genau mit b multipliziert.

Man hat $f(x_0 + 1) = b^{x_0+1} = b^{x_0} \cdot b^1 = b \cdot f(x_0)$. Das bedeutet, dass der Zunahmefaktor immer derselbe ist, wenn man um eine Einheit nach rechts geht. Für $b < 1$ ist es logischerweise ein Abnahmefaktor.

Man kann diese Feststellung so verallgemeinern: Wenn man in x -Richtung einen festen Wert addiert, dann wird der Funktionswert immer mit dem gleichen Faktor multipliziert, egal, wie gross der Funktionswert an der Stelle war, von der man ausgegangen ist. Das bekannteste Anwendungsbeispiel dazu kommt aus der Physik: Die Halbwertszeit ist unabhängig davon, wie gross die Strahlung war, als man mit den Messungen begonnen hat.



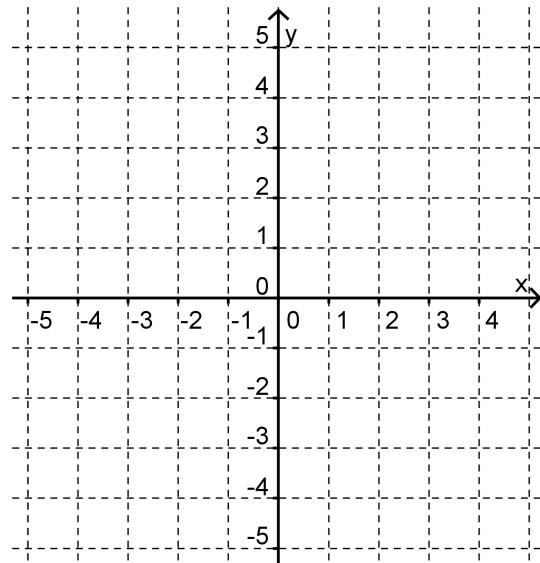
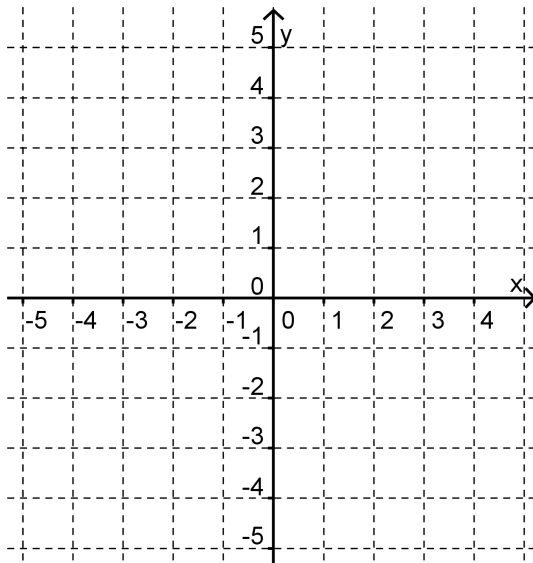
.....

.....

.....

6. Funktionsgraphen strecken und schieben

Zeichne die Graphen zu $y = 3 \cdot 2^x$ und $y = -2 \cdot 3^x$ ins linke Koordinatensystem ein.
 Zeichne die Graphen zu $y = 2^x - 4$ und $y = 3^x + 1$ ins rechte Koordinatensystem ein.

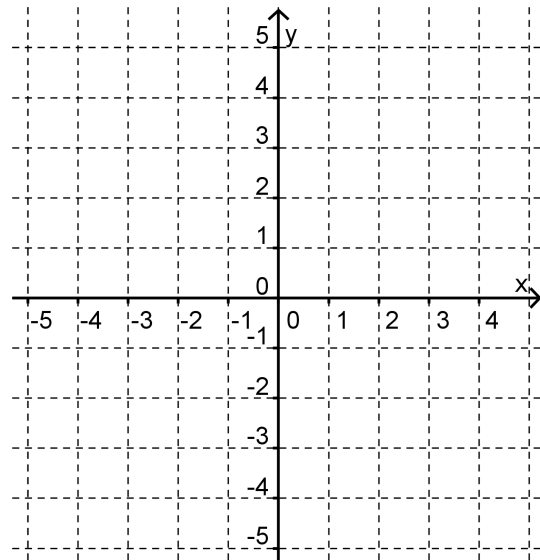
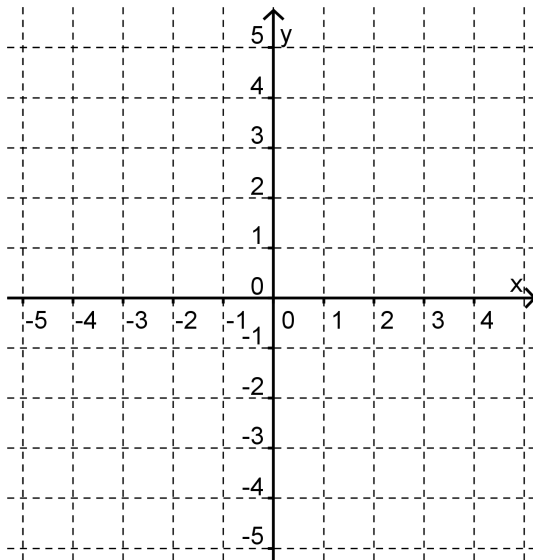


.....

7. Exponentialfunktionen möglichst allgemein

a) $y = f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$

b) $y = f(x) = 5 - 6 \cdot 3^x$

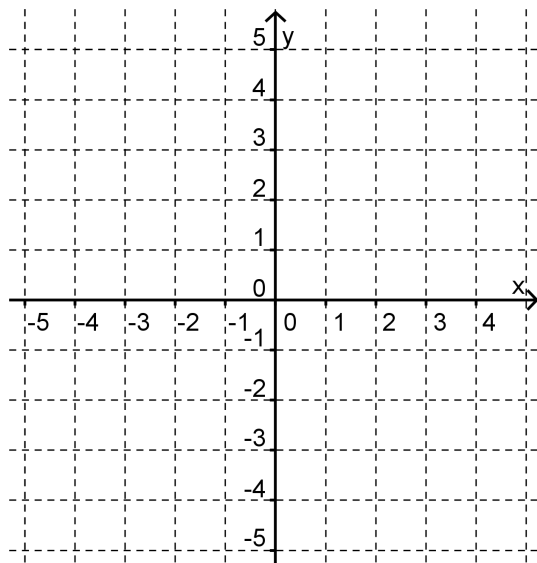
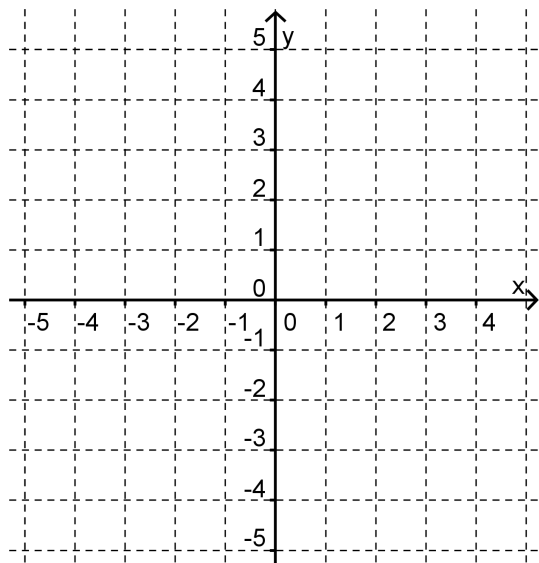


.....

8. **Verschieben parallel zur x-Achse**

Zeichne ins linke Koordinatensystem die Funktion $y = 3^{x-4}$ ein.

Zeichne rechts die Funktionen $y = f(x) = 2^{x+2}$ und $y = g(x) = 4 \cdot 2^x$ ein.



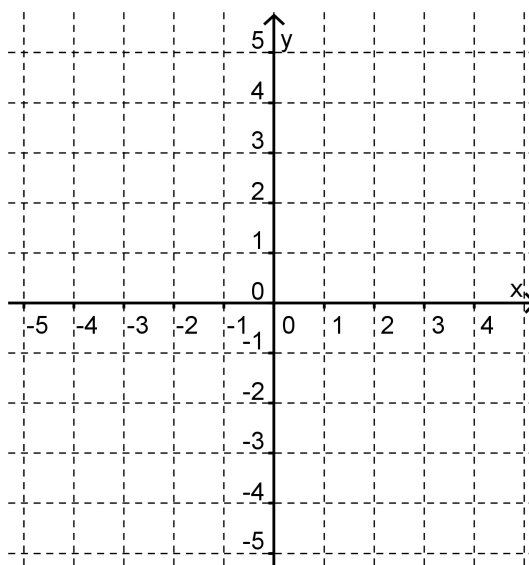
.....

9. **Lernkontrolle**

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = 4 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

- a) Zeichne den Funktionsgraphen.
- b) Mit welchen Abbildungen (und in welcher Reihenfolge!) kommt man, ausgehend von $y = 2^x$, zu diesem Funktionsgraphen?



4.2. Funktionsgleichungen bestimmen

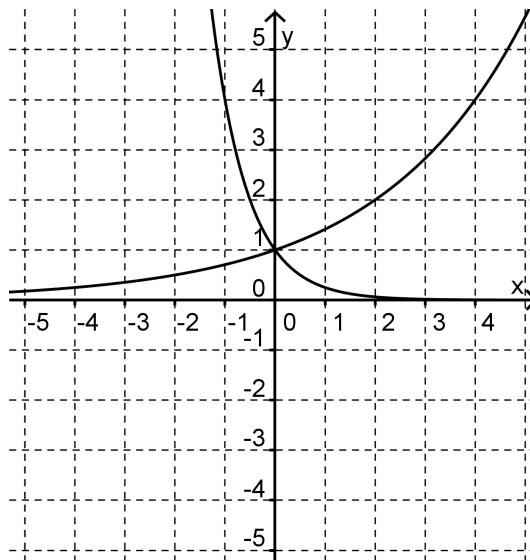
1. **Reine Exponentialfunktionen**

Bestimme die Gleichungen der Exponentialfunktionen $y = f(x) = b^x$

.....

.....

.....



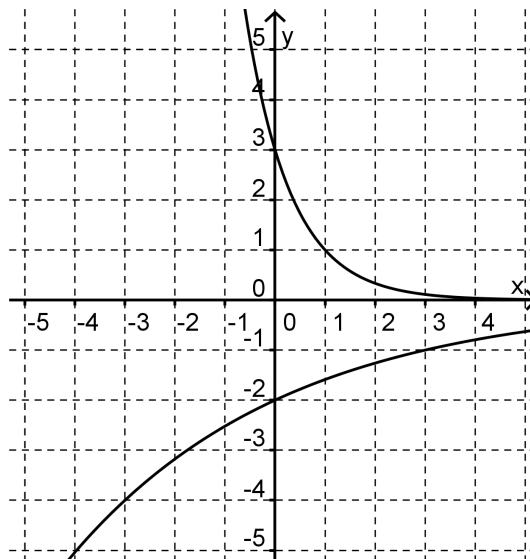
2. **Exponentialfunktionen, gestreckt**

Bestimme die Gleichungen der Exponentialfunktionen $y = f(x) = a \cdot b^x$

.....

.....

.....



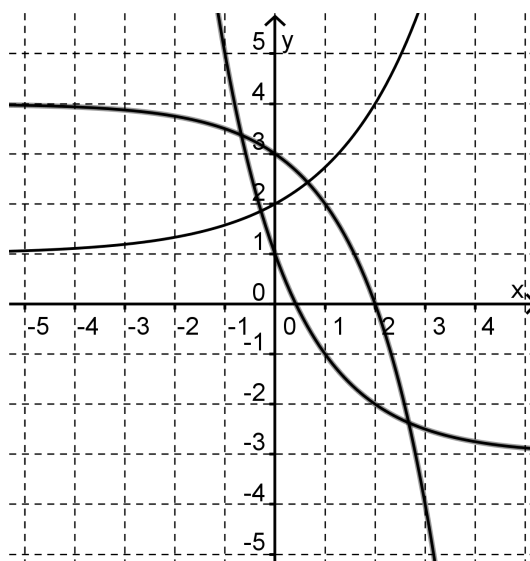
3. **Der allgemeine Fall**

Bestimme die Gleichungen der Exponentialfunktionen $y = f(x) = a \cdot b^x + c$

.....

.....

.....



4. **Zusammenfassung**

Gegeben sei $y = f(x) = a \cdot b^x + c$.

Welche Bedeutung hat a ?

.....

Welche Bedeutung hat b ?

.....

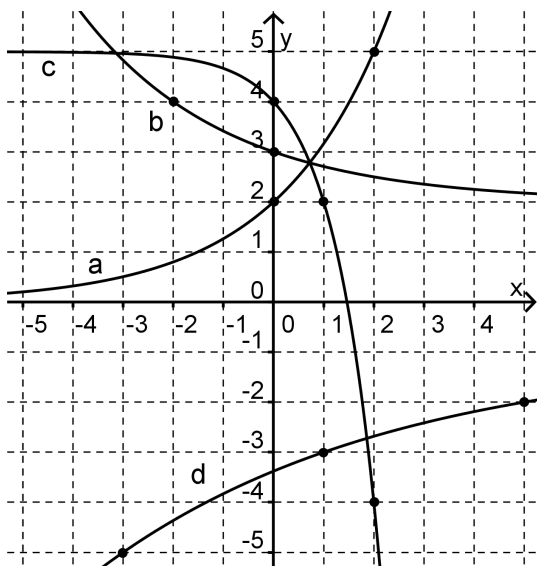
Welche Bedeutung hat c ?

.....

5. **Lernkontrolle**

Bestimme die Funktionsgleichungen dieser Exponentialfunktionen.

(Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind markiert.)



4.3. Anwendungen

1. Exponentielles Wachstum

Am 1. 1. 2003 hat Mr X auf seinem Konto ein Kapital von 2000 Fr, 10 Jahre später beträgt sein Kontostand 2438 Fr. (Wir nehmen dabei an, dass keine Kontobewegungen getätigt wurden und die Zinseszinseszinsen immer auf dem Konto gutgeschrieben wurden.)

- a) Berechne den Zinsfuß resp. die jährliche prozentuale Zunahme.
- b) Welches war der Kontostand am 1. 1. 2008?

2. Exponentielle Abnahme

In einem Physikexperiment wurde die Strahlung eines radioaktiven Elements untersucht. Zu Beginn der Untersuchungen beträgt die Intensität 15000 Einheiten; die tägliche Abnahme betrage 12%. Welche Strahlung misst man 25 Tage nach Untersuchungsbeginn?

3. Kaffeetemperatur

Die Kaffeetasse: Die Temperatur von Kaffee kann als Funktion, abhängig von der Zeit t , mit der Funktionsgleichung $y = f(t) = a \cdot b^t + c$ beschrieben werden.

Zur Zeit $t = 0$ sei der Kaffee 72°C warm, nach einer Minute messen wir eine Temperatur von 62°C und nach 2 Minuten noch 54°C .

- a) Bestimme a , b und c .
- b) Wie warm ist es in dem Zimmer, in dem die Kaffeetasse steht?
- c) Wie kalt ist der Kaffee nach 10 Minuten?

4. Aus einer Prüfung

Die Funktion $y = f(x) = a \cdot b^x + c$ geht durch die Punkte $(0|19)$, $(1|73)$ und $(2|91)$.

- a) Berechne a , b und c .
- b) Die Kurve geht durch den Punkt $P(4|p)$. Berechne p .

5. Lernkontrolle

In einer Sauna steht ein Glas Wasser. Um 21 Uhr misst man eine Wassertemperatur von 18°C , um 21:30 Uhr misst man 26°C und um 22 Uhr 33°C . Wie warm ist es in der Sauna?