

2. Wurzeln

2.1. Rechnen mit Wurzeln

1) Beispiel

Löse die Gleichung: $8^{n+1} = 16$.

.....

2) Satz

.....

3) Beweis

.....

.....

4) Satz

.....

5) Beweis

.....

.....

6) Bemerkung

Alle Potenzgesetze gelten auch für rationale und reelle Exponenten (ohne Beweis).

Zusätzlich gilt $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ und somit $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$

7) Definition

Im Ausdruck $\sqrt[n]{x}$ heisst x

und n heisst

8) Potenzgesetze bei Wurzeln

a) $\sqrt[5]{a^2} =$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a} =$

c) $\sqrt[5]{\sqrt{a}} =$

d) $\frac{5}{\sqrt[5]{a^2}} =$

e) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b} =$

9) Musterbeispiele

Suche verschiedene Möglichkeiten, den Ausdruck anders zu schreiben.

a) $\sqrt[5]{s} =$

b) $m^{\frac{1}{4}} =$

c) $\frac{1}{\sqrt{x}} =$

d) $t^{-\frac{1}{5}} =$

e) $h^{\frac{5}{4}} =$

f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} =$

g) $\sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{n} =$

h) $(\sqrt[4]{m})^6 =$

i) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} =$

j) $\sqrt[5]{y^4} : y^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{y^3} =$

10) Potenzen mit reellen Exponenten

a) $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}} = \dots\dots\dots$

b) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{18}} = \dots\dots\dots$

11) Freiwillige Übung

a) $\sqrt[3]{a} =$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{a}} =$

c) $\sqrt[5]{m^{-3}} =$

d) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^4}} =$

e) $(\sqrt[3]{a})^{-9} =$

f) $\sqrt[12]{a} \cdot \sqrt[6]{a} =$

g) $(\sqrt[4]{a} : \sqrt[5]{a}) : \sqrt[8]{a} =$

h) $\sqrt[4]{a^5} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{a^5} =$

2.2. Gleichungen mit Wurzeln

1) Bemerkung

Die (beispielsweise) vierte Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert, die dritte Wurzel hingegen schon. Bei Ausdrücken der Art $\sqrt[n]{a^m}$ wird es ziemlich mühsam. Deshalb legen wir fest, dass für alle Radikanden nur positive Werte zugelassen sind.

2) Gleichungen mit unbekannter Basis

a) $\sqrt[3]{x} = 6$

b) $\frac{2}{\sqrt[5]{x}} = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

3) Exponentialgleichungen

a) $32 = 4^x$

.....

b) $3^{2x+1} = 81$

.....

c) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x$

.....

d) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

.....

.....

4) Anwendung

Das Verhältnis der Oberflächen zweier Würfel beträgt 4 : 3.

Berechne das Verhältnis ihrer Seitenkanten sowie das Verhältnis ihrer Volumen.

5) Freiwillige Übung

a) $3^x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{6}{\sqrt[4]{x}}$

c) $3^{\sqrt{2}} = 9^{x+1}$

d) $x^4 = (\sqrt{5})^3$

e) $16^x \cdot 2^4 = 2^x$

f) $16^x + 2^4 = 10 \cdot 4^x$