

Die Gleichung $x^y = z$

1. Potenzen

1.1. Potenzgesetze / Rechnen mit Potenzen

1) Beispiele

- a) Wie lange braucht das Licht von der Sonne, bis es an der Erde ankommt?
Die Entfernung der Erde von der Sonne wird mit $1.5 \cdot 10^{11}$ m angegeben und die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- b) Wie viele Wassermoleküle H_2O hat es in einem Liter Wasser?
1 mol Wasser wiegt 18.02 g. Und 1 mol enthält $6.02 \cdot 10^{23}$ Wassermoleküle.
Vereinfachend nehmen wir an, dass ein Liter Wasser genau 1 kg wiegt.

2) Definition

x^n mit $n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

Somit ist $x^1 =$

Dabei heisst

3) Rechengesetze (Repetition)

a) $x^3 \cdot x^5 =$ bzw. verallgemeinert

.....

.....

b) $\frac{x^{13}}{x^7} =$ bzw. verallgemeinert

.....

.....

c) $x^4 \cdot y^4 =$ bzw. verallgemeinert

.....

.....

d) $\frac{x^7}{y^7} =$ bzw. verallgemeinert

.....

.....

e) $(x^3)^5 =$ bzw. verallgemeinert

.....

.....

4) Musterbeispiele

Forme die Terme um. (Suche ev. mehrere Möglichkeiten.)

a) $a^3 \cdot a^8 \cdot a =$

b) $6^n \cdot 6^{n+1} =$

c) $\frac{s^{32}}{s^8} =$

d) $\frac{5^n}{5^3} =$

e) $m^8 \cdot n^8 =$

f) $5^n \cdot 3^n \cdot 2^n =$

g) $\frac{t^8}{s^8} =$

h) $\frac{2^{n+3}}{6^{n+3}} =$

i) $(2x^4)^5 =$

j) $8 \cdot 2^n =$

5) Vorzeichen!

a) Wir vergleichen:

$(-2)^4 =$

$-2^4 =$

b) Ebenso:

$(-3)^3 =$

$-3^3 =$

c) $(-1)^n =$

6) Übungen

a) $(-3a^2b)^4 =$

b) $(-(3a)^2b)^3 =$

7) Positiv oder negativ?Für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$ wird der Ausdruck positiv, für welche negativ?

a) $(-3)^{n+7}$

b) $(-2)^{2n+1}$

8) Freiwillige Übung

a) Vereinfache so weit wie möglich

$3^3 \cdot 3^t \cdot 3^4 =$

$\frac{x^{n+3}}{x^{n-1}} =$

$\frac{8^n}{2^n} =$

$\frac{5^n}{5^n} =$

b) Schreibe ohne Klammern.

$(2 \cdot a \cdot b)^3 =$

$(3a)^n =$

$(-3a)^2 b^4 =$

$((-3a)^2 b)^3 =$

1. 2. Gleichungen mit Potenzen

1) Die Unbekannte steht in der Basis

a) $x^3 = 216 = 6^3$

.....

.....

b) $x^6 = 64 = 2^6$

.....

.....

c) $x^2 = -4$

.....

d) $x^5 = -32$

.....

2) Beispiele

a) $5 + 4 \cdot x^3 = 113$

b) $7 - 6 \cdot x^4 = 5 \cdot x^4 - 13^2$

c) $\frac{2^3 - x^5}{2^2} = 10$

3) Exponentialgleichungen

a) $3^x = 81$

Argumentvergleich:

.....

b) $9^5 = 3^{x-5}$

.....

Bevor ein Argumentvergleich möglich ist,

.....

4) Übungen

a) $5^3 + 2^x = 157$

b) $3 \cdot 2^x = 120 - 6 \cdot 2^{x+1}$

c) $3 \cdot 4^x = 6 \cdot 2^{x+5}$

5) Freiwillige Übung

a) $5 \cdot x^3 = 135$

b) $3 \cdot x^4 = x^4 + 2^5$

c) $2^4 + 9 \cdot 3^x = 7 + 4 \cdot 3^{x+1}$

d) $8^{x+1} \cdot 2^{x-1} = 4^{x+5}$

e) $9 \cdot 3^x = 27 \cdot 9^{x-2}$

1. 3. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1) Exponent Null

$$x^0 = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

2) Was ist 0^0 ?

$$x^0 = \dots, \text{ folglich } \dots\dots\dots$$

$$0^7 = \dots, \text{ aber } \dots\dots\dots$$

3) Erweiterung des Potenzbegriffs

Was ist x^{-3} ? Um diese neue Rechnung auf etwas Bekanntes zurückzuführen, verwenden wir ein Potenzgesetz.

.....

.....

Potenzgesetz für negative Exponenten:

.....

.....

4) Wichtige Umformungen

.....

.....

5) Satz

.....

.....

6) Kopfrechnungen mit negativen Exponenten

Mit diesen Zahlenbeispielen sollen negative Exponenten etwas vertrauter werden.

$$2^{-3} = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

7) Zehnerpotenzen

a) $10^3 = \dots\dots\dots$

b) $10^9 = \dots\dots\dots$

c) $10^{-6} = \dots\dots\dots$

d) $10^{-9} = \dots\dots\dots$

8) Musterbeispiele

Forme die Terme um. (Suche ev. mehrere Möglichkeiten.)

a) $a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a =$

b) $6^{2n} \cdot 6^{1-n} =$

c) $\frac{s^{-9}}{s^{-3}} =$

d) $\frac{4^{-2}}{4^m} =$

e) $m^{-5} \cdot n^{-5} =$

f) $5^{3-n} \cdot 3^{3-n} =$

g) $\frac{t^{-8}}{s^{-8}} =$

h) $\frac{2^{n-3}}{6^{n-3}} =$

i) $(2x^{-4})^{-6} =$

j) $(x^{-3} \cdot x^{-5})^{-2} =$

9) Rechnen mit Zehnerpotenzen

a) $5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} =$

b) $(5 \cdot 10^{-4}) : (2 \cdot 10^{-3}) =$

c) $5 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-3} =$

d) $5 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3} =$

10) Freiwillige Übung

a) Vereinfache so weit wie möglich

$3^{-3} \cdot 3^t \cdot 3^{-2} =$

$\frac{x^{n-5}}{x^{2n-3}} =$

$\frac{8^{-r}}{2^{-r}} =$

$\frac{9^n}{3^{n-1}} =$

b) Schreibe ohne Klammern.

$(3 \cdot e \cdot f)^{-3} =$

$(3x)^{-n} =$

$(-3a)^{-2} b^{-4} =$

$\left((2x)^{-2} \cdot x^{-4}\right)^{-3} =$

c) Zehnerpotenzen

$3 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^3 =$

$(3 \cdot 10^{-5}) : (8 \cdot 10^3) =$

$\frac{2^4 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 10^{-11}} =$

1. 4. Gleichungen mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1) Gleichungen

a) $x^3 = 27^{-2}$

.....

b) $x^{-5} = 32$

.....

c) $x^{-4} = \frac{16}{81}$

.....

d) $x^{-2} = 9 \cdot 10^{-12}$

.....

2) Exponentialgleichungen

a) $3^{x-5} = 3^2$

.....

b) $2^4 + 3^{5-x} = 5^2$

.....

c) $2^{-3} \cdot 2^{2-x} = 2^{-5}$

.....

d) $2^x \cdot 8^3 = 4^{x-1} \cdot 16$

.....

3) Knacknuss

$4^x + 2^5 = 12 \cdot 2^x$

.....

.....

.....

4) Freiwillige Übung

a) $3 \cdot x^{-2} = 12$

b) $3 + x^{-2} = 12$

c) $2^{x-8} \cdot 32 = 4^x$

d) $3^x = 81 \cdot 3^{-x}$

e) $3^x + 3^{3-x} = 12$