

Lösung Matura EF AM (2007)

Aufgabe 1a)

Berechne die ersten Folgenglieder
 z_1 bis z_4

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
0 $0^2 + \frac{i}{3}$ 1/3 · i $(1/3 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ -1/9 + 1/3 · i $(-1/9 + 1/3 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ -.098765 + .259259 · i ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 4/30</small>					

z_5 bis z_7 (siehe rechts).
 Grenzwert = Fixpunkt = $-0.07735 + 0.288675 i$

$cSolve(z = z^2 + \frac{i}{3}, z)$
 $z = \frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$ or $z = \frac{-2 \cdot \sqrt{3} - 3}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$
 $cSolve(z = z^2 + \frac{i}{3}, z)$
 $z = 1.07735 - .288675 \cdot i$ or $z = -.07735 + .288675 \cdot i$
csolve(z=z^2+i/3,z)
MAIN RAD AUTO FUNC 9/30

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(-.098765432098765 + .25925925925926 \cdot i)^2$ $-.057461 + .282122 \cdot i$ $(-.057460752934004 + .28212162780064 \cdot i)^2$ $-.076291 + .300911 \cdot i$ $(-.07629087474514 + .30091149102855 \cdot i)^2$ $-.084727 + .28742 \cdot i$ ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 7/30</small>					

Aufgabe 1b)

Die Folge strebt gegen den gleichen Grenzwert, aber das merkt man erst etwa ab dem 10. Folgenglied.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(-.8 + .1 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$.63 + .173333 · i $(.63 + .1733333333333333 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$.366856 + .551733 · i $(.3668555555555556 + .5517333333333333 \cdot i)^2$ $-.169827 + .738146 \cdot i$ ans(1)^2+(i/3) <small>MAIN RAD AUTO FUNC 13/30</small>					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(-.093442594650691 + .314379333939448 \cdot i)^2$ $-.090103 + .27458 \cdot i$ $(-.090102850543057 + .27458049097815 \cdot i)^2$ $-.067276 + .283852 \cdot i$ $(-.067275922349818 + .28385236345204 \cdot i)^2$ $-.076046 + .29514 \cdot i$ ans(1)^2+(i/3) <small>MAIN RAD AUTO FUNC 23/30</small>					

Aufgabe 1c)

Den Fixpunkt hat man schon in Aufgabe 1a).
 Hier ist noch die Kontrolle, dass es sich um einen Fixpunkt handelt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$ $\frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$ $(\frac{2 \cdot \sqrt{3} + 3}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1/2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$ $(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1/2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1/2 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot i$ ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 26/30</small>					

Aufgabe 1d)

Die Folge bleibt am Anfang nahe beim Fixpunkt. (1.5 Punkte)
 Ab dem 12. Folgenglied geht sie rasch ins Unendliche.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(1.077 - .289 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ $1.07641 - .289173 \cdot i$ $(1.076408 - .289172666666667 \cdot i)^2 + \frac{i}{3}$ $1.07503 - .289202 \cdot i$ $(1.0750333513169 - .28920221022935 \cdot i)^2$ $1.07206 - .288471 \cdot i$ ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 30/30</small>					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(1.0720587880421 - .28847070920889 \cdot i)^2$ $1.06609 - .285182 \cdot i$ $(1.0660946949468 - .28518178446693 \cdot i)^2$ $1.05523 - .274728 \cdot i$ $(1.055229248402 - .27472824169799 \cdot i)^2$ $1.03803 - .246469 \cdot i$ ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 30/30</small>					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(.08507200299847 + 1.9794025688974 \cdot i)^2$ $-3.9108 + .670117 \cdot i$ $(-3.9107972840634 + .67011681588617 \cdot i)^2$ $14.8453 - 4.90805 \cdot i$ $(14.845278850105 - 4.9080487138123 \cdot i)^2$ $196.293 - 145.389 \cdot i$ ans(1)^2+i/3 <small>MAIN RAD AUTO FUNC 30/30</small>					

Aufgabe 2a)

Produktionsmatrix

Aufgabe 2b)

Kostenrechnung mit dem üblichen Verfahren.
Alle Kostenvektoren sind liegende Vektoren.

Aufgabe 2c)

Produktionsmatrix \times Produktionsvektor = Verbrauchsvektor
Die Lösung über die inverse Matrix geht nicht, weil die Produktionsmatrix singularär ist. (1 Punkt)
Also muss man Produktionsmatrix \times Produktionsvektor ausschreiben.

Das entstehende Gleichungssystem löst man (beispielsweise) nach x und y auf. z ist Parameter.
Weil die Lösungen ganzzahlig und nichtnegativ sein müssen, kommen für z nur die Werte 1, 8, 15, 22, ... in Frage. (1 Punkt)

Setze die z-Werte als Bedingung.
Für z = 15 wird y negativ.
Also gibt es nur die Lösungen
 $[P_1; P_2; P_3] = [6; 9; 1]$ und $[P_1; P_2; P_3] = [7; 4; 8]$
(2 Punkte)

Kontrolle.

Aufgabe 3a)

Daten eingeben.

Weil sich die Kurve der 100%-Marke exponentiell nähert, muss man die Differenz zu 100 betrachten.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
reg1	regy	reg100				
0	5	95				
5	22	78				
10	35	65				
15	45.5	54.5				
20	53	47				
30	64	36				
40	70	30				
60	76.5	23.5				

reg100[1]=95

Führe die Regression durch.

$$y = 100 - 82.4687 \cdot 0.976805^x$$

$$R^2 = 0.9504$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
Exprs...						
reg	y=a*b^x					
5	a	=82.4687				
10	b	=.976805				
15	r^2	=.950405				
20	r	=-.974887				
Enter=OK						
0						
5						
10						
15						
20						
30						
40						
60	76.5	23.5				

reg100[1]=95

Nach 30.83 Sekunden wird 60% Sättigung erreicht.

(Die Lösung 13.55 Sekunden erhält, wer vergisst, auf 100 zu ergänzen.)

(Wer die Regression mit den gegebenen Daten vollständig durchführt, erhält 3 Punkte)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$y_1(x) = 82.4687 \cdot (.976805)^x$ $\text{solve}(y_1(x) = 60, x) \quad x = 13.5533$ $\text{solve}(100 - y_1(x) = 60, x) \quad x = 30.8304$					
solve(100-y1(x)=60,x)					

Aufgabe 3b)

Ergänzen auf 90 und 80 Prozent

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
reg1	regy	reg100	reg90	reg80		
0	5	95	85			
5	22	78	68			
10	35	65	55			
15	45.5	54.5	44.5			
20	53	47	37			
30	64	36	26			
40	70	30	20			
60	76.5	23.5	13.5			

reg80=80-regy

Regression für max. Sättigung von 90 [%]

$$y = 90 - 74.8174 \cdot 0.969433^x$$

$$R^2 = 0.9733$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
Exprs...						
reg	y=a*b^x					
5	a	=74.8174				
10	b	=.969433				
15	r^2	=.973285				
20	r	=-.986552				
Enter=OK						
0						
5						
10						
15						
20						
30						
40						
60	76.5	23.5	13.5	3.5		

reg80[1]=75

Regression für max. Sättigung von 80 [%]

$$y = 80 - 74.7284 \cdot 0.950376^x$$

$$R^2 = 0.9999$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plots	List	Calc	Distr	Tests	Ints
Exprs...						
reg	y=a*b^x					
5	a	=74.7284				
22	b	=.950376				
35	r^2	=.999866				
45.5	r	=-.999933				
53						
64						
70						
76.5	23.5	13.5	3.5	1.8839	1.503	

resid[1]=.12760048344475

Die letzte Regressionskurve ist die beste.

Bei 90% max. Sättigung wird die 60%-Marke nach 29.44 Sekunden erreicht, bei 80% maximaler Sättigung schon nach 25.9 Sekunden.

Das letzte Resultat stimmt auch am besten mit den gegebenen Daten überein. Die 60%-Marke sollte etwa in der Mitte zwischen 20 und 30 Sekunden erreicht sein.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$y_1(x) = 82.4687 \cdot (.976805)^x$ $\text{solve}(y_1(x) = 60, x) \quad x = 13.5533$ $\text{solve}(100 - y_1(x) = 60, x) \quad x = 30.8304$ $\text{solve}(90 - y_2(x) = 60, x) \quad x = 29.437$ $\text{solve}(80 - y_3(x) = 60, x) \quad x = 25.8977$					
solve(80-y3(x)=60,x)					

Aufgabe 4a)

Matrix.

Die Randhäufigkeiten sind rechts aussen 650 und 390, unten 520, 208, 312.

Die Sollwerte sind

[325, 130, 195; 195, 78, 117]

χ^2 -Wert 3.698 bei $f = 2$ Freiheitsgraden.

Perzentile 15.74%

Somit sind die Daten in Ordnung.

(für falsche Anzahl Freiheitsgrade gibt es bei a) 1 Punkt Abzug, aber nicht nochmals bei b)

Hier ist noch die Soll-Matrix.

Aufgabe 4b)

Rechne die neue Matrix aus (chm2) und betrachte die Differenzen zu den gleichbleibenden Soll-Werten.

Den χ^2 -Wert muss man von Hand (in Abhängigkeit von x) rechnen. (2. Teil der Zeile im Bildschirm rechts)

$$\frac{49}{325} + \frac{(x-130)^2}{130} + \frac{(123-x)^2}{195} + \frac{49}{195} + \frac{(130-x)^2}{195} + \frac{(123-x)^2}{195} + \frac{49}{195} + \frac{(130-x)^2}{78} + \frac{(x-123)^2}{117}$$

$$\frac{4 \cdot x^2 - 1696 \cdot x + 540112}{117 \cdot 195 \cdot 975} + \frac{4 \cdot x^2 - 1696 \cdot x + 540112}{117 \cdot 195 \cdot 975}$$

χ^2 -Wert 5.99146 (auch aus der Tabelle)

Die 5%-Perzentile führt zu $\chi^2 = 0.102587$.

Für $x \geq 140$ und für $x \leq 114$ wird die Abweichung zu gross.

Solche Werte sprechen für Abhängigkeit.

Also $115 \leq x \leq 139$ sprechen für Unabhängigkeit.

Die zu kleinen χ^2 -Werte können gar nicht erreicht werden.

Aufgabe 5a)

Das Lösen hat "von Hand" zu erfolgen.
(Separation der Variablen)

Calculator screen showing the differential equation $y' = \frac{x^2 - 1}{y}$ and its solution $y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + C1$. The user has entered the function $\frac{2}{3}x^3 - 2x + t \rightarrow y(x)$ into the Y= editor.

Aufgabe 5b)

Anfangsbedingungen einsetzen

Calculator screen showing the solution of the differential equation with initial conditions. The user has entered $\text{solve}(y(-3)=0, t)$ and $\text{solve}(y(-1)=0, t)$ to find t values. The results are $t = 12$, $t = 65/12$, $t = 4/3$, $t = -3/4$, and $t = -4/3$.

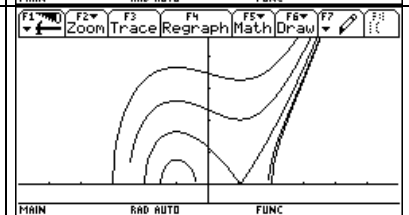
Kurven definieren

2 Punkte für korrekte Werte von t.

Calculator screen showing the definition of the curves y_1 through y_5 with their respective t values: $y_1=y(x) | t = 12$, $y_2=y(x) | t = 65/12$, $y_3=y(x) | t = 4/3$, $y_4=y(x) | t = -3/4$, and $y_5=y(x) | t = -4/3$.

Die Grafik sieht dann so aus: (2 Punkte)

(Alle Kurven gehen auf die x-Achse herunter und sind auch an der x-Achse zu spiegeln.)



Eigenschaften: (2 Punkte)

Die lokalen Maxima der Kurven liegen bei $x = -1$, die Minima bei $x = 1$.

Dort liegen die horizontalen Tangenten, denn dann wird $y' = 0$, weil $x^2 - 1 = 0$ wird.

Die Kurven treffen rechtwinklig auf die x-Achse auf. Ausnahme siehe unten.

$y_1(x)$ und $y_2(x)$ bestehen aus einem Kurvenbogen.

$y_3(x)$ trifft bei $x = 1$ auf die x-Achse, also stimmt die Aussage vom Minimum und nicht mehr und die x-Achse wird nicht rechtwinklig geschnitten.

$y_4(x)$ zerfällt in zwei Kurvenbogen.

Bei $y_5(x)$ fehlt der linke Kurventeil und es ist nur noch ein Kurvenbogen.

Aufgabe 6a)

Definiere die Matrizen

Calculator screen showing matrix definitions:

- $a = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$
- $b = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

Current input: $\langle -3, 1; -1, -3 \rangle \rightarrow b$

Streckungsfaktoren und Drehwinkel (ev. mit Skizzen)

Calculator screen showing calculations:

- $\text{det}(a) = 97$
- $\text{det}(a) = 9.84886$
- $(\tan^{-1}(9/4)) \rightarrow DD = 66.0375^\circ$
- $\text{det}(b) = 10$
- $\text{det}(b) = 3.16228$
- $(\tan^{-1}(1/3) + \pi) \rightarrow DD = 198.435^\circ$

Current input: $\langle \tan^{-1}(1/3) + \pi \rangle \rightarrow DD$

Aufgabe 6b)

Das Produkt ist wieder eine Drehstreckung

Calculator screen showing calculations for $a \cdot b$:

- $\text{det}(b) = 10$
- $\text{det}(b) = 3.16228$
- $(\tan^{-1}(1/3) + \pi) \rightarrow DD = 198.435^\circ$
- $a \cdot b = \begin{bmatrix} -3 & 31 \\ -31 & -3 \end{bmatrix}$
- $\text{det}(a \cdot b) = 970$
- $(\tan^{-1}(31/3) + \pi) \rightarrow DD = 264.472^\circ$

Current input: $\langle \tan^{-1}(31/3) + \pi \rangle \rightarrow DD$

Aufgabe 6c)

Das Kommutativgesetz gilt.

Calculator screen showing verification of $a \cdot b = b \cdot a$:

- $\text{det}(a \cdot b) = 970$
- $(\tan^{-1}(31/3) + \pi) \rightarrow DD = 264.472^\circ$
- $b \cdot a = \begin{bmatrix} -3 & 31 \\ -31 & -3 \end{bmatrix}$
- $a \cdot b = b \cdot a$ (true true)

Current input: $a * b = b * a$

Aufgabe 6d)

Definiere Drehmatrizen und Streckungsmatrizen allgemein (Dieser Teil geht auch ganz von Hand)

Calculator screen defining matrices:

- $\text{dreh}(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$
- $\text{dreh}(a) = \begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$
- $\text{dreh}(b) = \begin{bmatrix} \cos(b) & \sin(b) \\ -\sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$

Current input: $\text{dreh}(be)$

Calculator screen defining matrices:

- $\text{stre}(k) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
- $\text{stre}(k) = \begin{bmatrix} k1 & 0 \\ 0 & k1 \end{bmatrix}$
- $\text{stre}(k) = \begin{bmatrix} k2 & 0 \\ 0 & k2 \end{bmatrix}$

Current input: $\text{stre}(k2)$

oder man macht einen Ansatz für Drehstreckungsmatrizen.

Calculator screen showing matrix multiplication:

- $m1 = \begin{bmatrix} b & a \\ c & -d \end{bmatrix}$
- $m2 = \begin{bmatrix} a \cdot c - b \cdot d & -a \cdot d - b \cdot c \\ a \cdot d + b \cdot c & a \cdot c - b \cdot d \end{bmatrix}$
- $m1 \cdot m2 = m2 \cdot m1$ (true true)

Current input: $m1 * m2 = m2 * m1$

Drehstreckungen und das Matrixprodukt

Calculator screen showing matrix multiplication:

- $\text{stre}(k1) \cdot \text{dreh}(a) \rightarrow a = \begin{bmatrix} \cos(a) \cdot k1 & \sin(a) \cdot k1 \\ -\sin(a) \cdot k1 & \cos(a) \cdot k1 \end{bmatrix}$
- $\text{stre}(k2) \cdot \text{dreh}(b) \rightarrow b = \begin{bmatrix} \cos(b) \cdot k2 & \sin(b) \cdot k2 \\ -\sin(b) \cdot k2 & \cos(b) \cdot k2 \end{bmatrix}$

Current input: $\text{stre}(k2) * \text{dreh}(be) \rightarrow b$

Calculator screen showing matrix multiplication:

- $a \cdot b = \begin{bmatrix} \cos(a) \cdot \cos(b) \cdot k1 \cdot k2 - \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot k1 \cdot k2 & \dots \\ -\cos(a) \cdot \sin(b) \cdot k1 \cdot k2 - \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot k1 \cdot k2 & \dots \end{bmatrix}$
- $a \cdot b = b \cdot a$ (true true)

Current input: $a * b = b * a$