

Anwendungen der Mathematik

Ergänzungsfach

O. Riesen

1. Komplexe Zahlen und Abbildungen

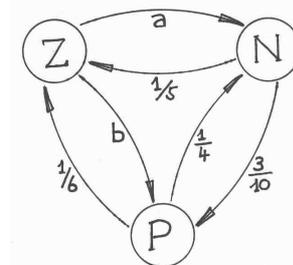
Eine komplexe Abbildung ist gegeben durch $w = \frac{z+4i}{z-i}$

- Bestimme den Bildpunkt von $z = 2 + 5i$ sowie den Urbildpunkt von $w = 3 - i$.
- Bestimme die Fixpunkte dieser Abbildung.
- Bestimme das Urbild der imaginären Achse. Zeichne einige Urbildpunkte in ein **genügend grosses** Koordinatensystem (empfohlene Einheit: 2 Häuschen oder 1 cm) und ziehe dann die vermutete Kurve von Hand durch.
- Begründe, weshalb $z = i$ keinen Bildpunkt hat. Welcher Punkt der komplexen Ebene hat kein Urbild?

2. Das Taxi-Unternehmen (Markov-Ketten)

Ein Taxi-Unternehmen bedient drei Standorte, nämlich Zentrum, Neustadt und Promenade. (Damit ein Graph mit Übergangswahrscheinlichkeiten sinnvoll ist, nehmen wir an, dass alle Fahrten gleich lange dauern und also immer alle Taxis gleichzeitig an den Standorten stationiert sind.)

Der Graph zeigt die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Fälle, bei denen der Standort wechselt.



- Setze vorerst $a = 1/3$ und $b = 1/3$. Bestimme dann die stabile Verteilung. (Wie viele Taxis sind nötig und wie muss man die Taxis auf die drei Standorte verteilen?)
- Man nehme nun an, dass für eine stabile Verteilung an allen drei Standorten jeweils gleich viele Taxis stationiert sein sollen. Bestimme die dafür benötigten Werte von a und b sowie die stabile Verteilung. (Wie viele Taxis werden pro Standort benötigt?)

3. Schokoladehasen (Chi-Quadrat-Test)

Erfahrungsgemäss bevorzugen 45% der Bevölkerung schwarze, 35% braune und 20% weisse Schokoladehasen. (So weit die Theorie, die geprüft werden soll.)

- Ein Ladeninhaber stellt fest, dass er gemäss der nachstehenden Tabelle Hasen verkauft hat:

Farbe	schwarz	braun	weiss
Anzahl verkaufter Hasen	178	122	65

Rechne die "Soll-Werte" aus und teste mit einem Chi-Quadrat-Test, ob die gemessenen Daten die Theorie bestätigen.

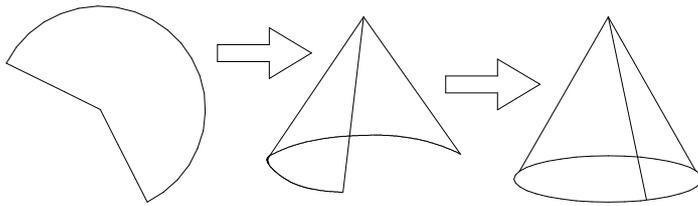
- Später hat man festgestellt, dass die Anzahl der schwarzen Hasen nicht stimmt. Die Tabelle muss also korrigiert werden.

Farbe	schwarz	braun	weiss
Anzahl verkaufter Hasen	x	122	65

Welche Werte von x bestätigen die Theorie? Könnte es sein, dass die gemessenen Werte zu nahe an der Theorie liegen?

4. Indianertipi mit maximalem Volumen (Regressionsrechnung)

Ein Kreissektor von 6m Radius wird zur Mantelfläche eines Kegels aufgerollt.



Das Kegelvolumen hängt ab von der Höhe des Kegels; und zwar ist die Funktion ein Polynom dritten Grades $V = a \cdot h^3 + b \cdot h^2 + c \cdot h + d$.

In einem Versuch wurde die Kegelhöhe und das Volumen gemessen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Höhe in m	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Volumen in m ³	18	36	53	67	78	85	87	84	74	57	33	0

- Bestimme die bestangepasste Funktion und den zugehörigen Koeffizienten R^2 . Löse die folgenden Aufgaben mit Hilfe der gefundenen Funktion.
- Das Volumen soll mindestens 70 m³ betragen. Welche Höhe muss das Zelt haben?
- Das Zelt sollte maximales Volumen haben. Bestimme die Höhe des Zeltes sowie die Menge des dazu benötigten Stoffes. (Berechne die Mantelfläche dieses Kegels).

5. Differentialgleichung

Löse die Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 12 \cdot e^x$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$ und $y'(0) = 1$.

6. Eigenwerte und Eigenvektoren

- Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Bestimme die exakten Werte für die Determinante, Eigenwerte und Eigenvektoren.

- Bestimme die Determinante sowie die Eigenwerte der Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- Überprüfe, dass für die obigen Matrizen A und B der folgende Satz gilt: "Das Produkt der beiden Eigenwerte ist gleich der Determinante der Matrix."
Gilt dieser Satz für jede beliebige 2 x 2 – Matrix? (Begründe oder widerlege!)
