

Anwendungen der Mathematik

Ergänzungsfach

O. Riesen

1. Komplexe Zahlen und Abbildungen

Eine komplexe Abbildung ist gegeben durch $w = f(z) = \frac{i}{2} \cdot z^2 + \frac{i}{2} + \frac{3}{4}$

- Berechne den Bildpunkt von $z = 2 + i$.
- Bestimme die Fixpunkte dieser Abbildung.
- Berechne die Urbildpunkte von $w = \frac{i}{2}$.

Eine komplexe Zahlenfolge (z_n) ist rekursiv gegeben: $z_{n+1} = \frac{i}{2} \cdot z_n^2 + \frac{i}{2} + \frac{3}{4}$

- Der Startwert sei $z_1 = 1$. Berechne die Folgenglieder z_2, \dots, z_4 und stelle die Werte z_1, z_2, z_3, z_4 in einer Figur dar. [Einheit: 1 cm oder 2 Häuschen.]
Bestimme den Grenzwert dieser Folge (z_n) und zeichne ihn auch in die Figur ein.
- Für welche Startwerte z_1 oszilliert die Folge zwischen zwei verschiedenen Werten und bildet also eine periodische Folge mit Länge 2? (*Rechne mit Näherungswerten!*)

2. Matrixrechnung (Lineare Abbildungen)

- Bestimme die Matrix, welche zur Spiegelung an der Geraden $y = 3x$ gehört.
- Verallgemeinere: Bestimme die Matrix, welche zur Spiegelung an $y = m \cdot x$ gehört.
- Die Matrix $B = \begin{pmatrix} t & \sqrt{1-t^2} \\ \sqrt{1-t^2} & -t \end{pmatrix}$ gehört zu einer Geradenspiegelung. Wie lautet die Gleichung der Spiegelungsachse [in Abhängigkeit von t]?

3. Wurfparabel (Regressionsrechnung)

In einem Experiment wird eine Kugel durch die Luft geworfen. Dabei darf angenommen werden, dass die Flugbahn der Kugel eine Parabel $y = f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschreibt. Mit Hilfe von 3 Lichtschranken in verschiedenen Höhen misst man die Durchgangszeiten der Kugel. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Höhe (in m)	1.5	2	2.5
Durchgangszeiten (in s)	0.09 und 1.03	0.21 und 0.88	0.42 und 0.68

[Zum Verdeutlichen: die Lichtschranke in 1.5 m Höhe stoppte die Kugel nach 0.09 Sekunden – im Flug nach oben – und nach 1.03 Sekunden – im Flug nach unten.]

- Führe eine quadratische Regression durch. Wie lautet die bestangepasste Funktion?
- Beantworte mit Hilfe der bestangepassten Funktion $y = f(t)$ folgende Fragen:
 - Zu welcher Zeit t landet die Kugel am Boden?
 - Wie hoch war die Abwurfhöhe?
 - Welche maximale Höhe erreichte die Kugel, und zu welcher Zeit wurde die grösste Höhe erreicht?

4. Chi-Quadrat-Test

Sind Blutgruppe und der Rhesusfaktor voneinander unabhängig? In einer Studie wurden von 900 Personen die Blutgruppe (0, A, B oder AB) und der Rhesusfaktor (positiv oder negativ) bestimmt.

Die Ergebnisse der Studie sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

Blutgruppe	0 [Null]	A	B	AB
Rh +	373	173	116	58
Rh -	77	52	34	17

- Welche "Soll"-Werte sind zu erwarten, damit Unabhängigkeit besteht?
- Überprüfe mit einem Chi-Quadrat-Test, ob die Ergebnisse in Ordnung sind. Sprechen die Daten für Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Blutgruppe und Rhesusfaktor? Mit wie vielen Freiheitsgraden rechnest du?
- Obige Tabelle bestand aus 2 Zeilen und 4 Spalten. Mit wie vielen Freiheitsgraden würdest du für eine grosse Tabelle mit m Zeilen und n Spalten rechnen? Begründe deine Ansicht.

5. Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung

Löse die Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = \cos(x)$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

6. Eine Kurve

Gegeben sind drei Darstellungen einer Kurve:

I) Als Menge in der komplexen Ebene durch: $z \cdot \bar{z} = (2 - \operatorname{Im}(z))^2$

II) In Polardarstellung: $r(\varphi) = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}$

III) In Parameterdarstellung: $\begin{cases} x = 2 \cdot \sin(t) \\ y = \cos^2(t) \end{cases}$

Zeige, dass es sich "im Wesentlichen" immer um dieselbe Kurve handelt und bestimme ihre Darstellung als Funktion $y = f(x)$. Um was für eine Kurve handelt es sich?
