Mathematik- Musterlösung

Klasse 6F | O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$.

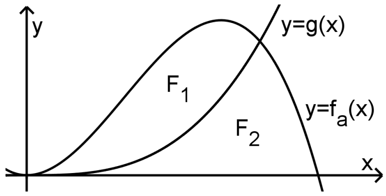
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Polstelle $x = 0$, gleichzeitig vertikale Asymptote.
Horizontale Asymptote $y = 1$
Nullstellen: $x^2 - x - 2 = 0$, also $(x-2)(x+1) = 0$,
folglich $N_1(\,-1\,|\,0\,)$ und $N_2(\,2\,|\,0\,)$.
Extrema: $f'(x) = 0$, also $x = -4$. $f(-4) = \dfrac{9}{8}$. $f''(-4) = -\dfrac{1}{64} < 0$,
folglich Maximum $M(\,-4\,|\,\dfrac{9}{8}\,)$
Wendepunkte: $f''(x) = 0$, also $x = -6$, $W(\,-6\,|\,\dfrac{10}{9}\,)$.

b) $f'(-6) = \dfrac{1}{108}$. Die Steigung stimmt.
y-Achsenabschnitt: $y = \dfrac{1}{108} \cdot x + v$ und W einsetzen: $\dfrac{10}{9} = \dfrac{1}{108} \cdot (-6) + v$
nach v auflösen ergibt $v = \dfrac{10}{9} + \dfrac{6}{108} = \dfrac{7}{6}$.
Die Behauptung stimmt.

c) Steigungen in den Nullstellen: $f'(-1) = -3$. $f'(2) = \dfrac{3}{4}$.
Damit der Schnittwinkel 45° wäre, müsste $f'(x) = \pm 1$ sein.
Oder man rechnet die Winkel $\alpha_1 = -71.565°$ bzw. $\alpha_2 = 36.87°$
Die Behauptung stimmt nicht.

2. **Flächen und Volumen**

Gegeben sind zwei Funktionen:
$y = f_a(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$ (wobei $a > 0$),
$y = g(x) = x^3$.
Die nebenstehende Skizze ist nicht massstäblich.



a) Nullstellen: $f(x) = 24x^2 - 3x^3 = 3x^2(8-x) = 0$, also $N_1(\,0\,|\,0\,)$, $N_2(\,8\,|\,0\,)$.
Schnittstelle: $f(x) = g(x)$, also $24x^2 - 3x^3 = x^3$ und somit
$24x^2 - 4x^3 = 4x^2(6-x) = 0$, also $x = 6$.

a₁) $F_{total} = \int_0^8 (24x^2 - 3x^3)\,\mathrm{d}x = 1024$

$F_1 = \int_0^6 (24x^2 - 3x^3 - x^3)\,\mathrm{d}x = 432$

$F_2 = F_{total} - F_1 = 592$, und somit $F_1 : F_2 = 27 : 37 = 0.7297$.

a₂) $V_{total} = \pi \int_0^8 (24x^2 - 3x^3)^2\,\mathrm{d}x = 564719.77$

$V_1 = \pi \int_0^6 \left((24x^2 - 3x^3)^2 - (x^3)^2\right)\mathrm{d}x = 301523.96$

$V_2 = V_{total} - V_1 = 263195.8$, und somit $V_1 : V_2 = 1.146$.

a₃) F_1 ist weiter weg von der x-Achse als F_2. Das gibt durch die Rotation (mehr Weg!) das grössere Volumen.

b) $y = f_a(x) = 12ax^2 - 3x^3$

b₁) $\int (12ax^2 - 3x^3)\,\mathrm{d}x = 4ax^3 - \frac{3}{4}x^4 + c$

b₂) Nullstellen: $12ax^2 - 3x^3 = 3x^2(4a - x) = 0$, also $N_1(\,0\,|\,0\,)$, $N_2(\,4a\,|\,0\,)$
Schnittstelle: $f(x) = g(x)$, also $12ax^2 - 3x^3 = x^3$ und somit
$12ax^2 - 4x^3 = 4x^2(3a - x) = 0$, also $x = 3a$.

$F_{total} = \int_0^{4a} (12ax^2 - 3x^3)\,\mathrm{d}x = 4ax^3 - \frac{3}{4}x^4 \Big|_0^{4a} =$

$= 4a(4a)^3 - \frac{3}{4}(4a)^4 = 256a^4 - 192a^4 = 64a^4$

$F_1 = \int_0^{3a} (12ax^2 - 4x^3)\,\mathrm{d}x = 4ax^3 - x^4 \Big|_0^{3a} =$

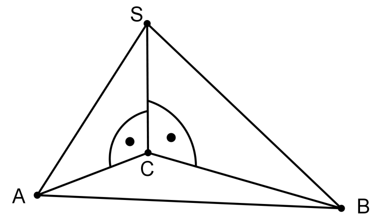
$= 4a(3a)^3 - (3a)^4 = 108a^4 - 81a^4 = 27a^4$

$F_2 = 64a^4 - 27a^4 = 37a^4$.

$F_1 : F_2 = 27 : 37 = 0.7297$ ist konstant, unabhängig von a.

3. **Pyramide**

Wir betrachten die dreiseitige Pyramide mit Bodenfläche ABC und Spitze S gemäss Figur.
Die Kante SC steht senkrecht auf die Bodenfläche.
Gegeben sind die Punkte A, B und C:
$A(\,1\,|\,2\,|\,2\,)$, $B(\,3\,|\,1\,|\,0\,)$, $C(\,-1\,|\,0\,|\,1\,)$.



a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, eventuell $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\varepsilon = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Kürzen ergibt $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Also $x - 2y + 2z - 1 = 0$ (mit Einsetzen eines Punktes).

b) $F = \dfrac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{9}{2}$.

c) $V = \dfrac{1}{3} \cdot F \cdot h = 18$ somit $h = \dfrac{3 \cdot 18}{F} = 12$.
$\overrightarrow{CS}$ ist parallel zu $\vec{n}_\varepsilon$ und hat Länge 12.
Also $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$ und somit $S_1(\,3\,|\,-8\,|\,9\,)$ oder $S_2(\,-5\,|\,8\,|\,-7\,)$.

(Ersatzwert $F = 9$: $h = 6$, $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $S_3(\,1\,|\,-4\,|\,5\,)$ oder $S_4(\,-3\,|\,4\,|\,-3\,)$)

d) $\overrightarrow{AS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$. Dann entweder: $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AS_1} \cdot \vec{n}_\varepsilon}{\|\overrightarrow{AS_1}\| \cdot \|\vec{n}_\varepsilon\|} = \dfrac{36}{3 \cdot \sqrt{17} \cdot 3} = 0.97$
und somit $\alpha = 14.036°$. Schliesslich $\beta = 75.964°$.
Oder direkt: $\sin(\beta) = \dfrac{h}{\|\overrightarrow{AS_1}\|} = \dfrac{12}{3 \cdot \sqrt{17}}$ und $\beta = 75.964°$

(Andere Werte: Für S_2 gibt es den gleichen Winkel, $\overrightarrow{AS_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$,

für S_3 wird $\overrightarrow{AS_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, für S_4 beträgt $\overrightarrow{AS_4} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\beta = 63.435°$)

e) Wenn man S_1 spiegelt, erhält man S_2 (und umgekehrt), ebenso für S_3 und S_4.
Wer mit S_1, S_2, S_3 resp. S_4 rechnet, erhält die reflektierten
Vektoren $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder Vielfache davon.

4. **Berühren, Schneiden, oder Meiden?**

Eine Kugel k_1 ist gegeben durch $M_1(\,1\,|\,-2\,|\,5\,)$ und $r_1 = 5$.

a) $||\overrightarrow{MP}|| = ||\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}|| = \sqrt{21} < 5.$

Der Punkt P liegt innerhalb von k_1.

b) Setze M in die HNF von ε ein: $\dfrac{x+2y-2z-3}{3} = \dfrac{1+2\cdot(-2)-2\cdot 5-3}{3} = \dfrac{-16}{3}.$

Weil $\dfrac{16}{3} > 5$, meidet die Kugel die Ebene.

c) Schneide die Kugel $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2 = 25$

mit der Geraden $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

Also $(1+3t-1)^2+(-2+4t+2)^2+(-2+5t-5)^2-25 = 0$

$(3t)^2+(4t)^2+(5t-7)^2-25 = 0$

$9t^2+16t^2+25t^2-70t+49-25 = 0$

$50t^2-70t+24 = 0$. Das ergibt $t_1 = \dfrac{3}{5} = 0.6$ und $t_2 = \dfrac{4}{5} = 0.8$ und somit $P_1(\,2.8\,|\,0.4\,|\,1\,)$ und $P_2(\,3.4\,|\,1.2\,|\,2\,)$.

d) Quadratisch Ergänzen: $k_2 : (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 9+1+1-t$.

Also $M_2(\,3\,|\,1\,|\,-1\,)$.

Abstand der Zentren: $||\overrightarrow{M_1M_2}|| = ||\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}|| = 7.$

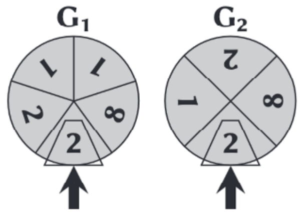
Weil $r_1 = 5$ und der Schnittkreis Radius 3 hat, beträgt der Abstand von M_1 zum Zentrum Z des Schnittkreises 4.

Folglich ist der Abstand von M_2 zu Z genau 3 und somit muss $r_2 = 3\sqrt{2}$ sein.

Weil $r_2^2 = 18 = 11-t$, muss $t = -7$ sein.

5. **Glücksräder**

Auf einer Chilbi stehen zwei Glücksräder (siehe die Figur). G_1 besteht aus fünf, G_2 aus vier gleich grossen Sektoren. Die Glücksräder bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im dargestellten Rahmen angezeigt wird.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten:
$p(14) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, $p(2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$, $p(0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$p(-2) = 1 - p(0) - p(2) - p(14) = \frac{13}{20}$.

G	-2	0	2	14
p	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

Dann ist $E(G) = -0.2$ und $V(G) = 13.16$.

b) Für den Veranstalter, weil $E(G) < 0$

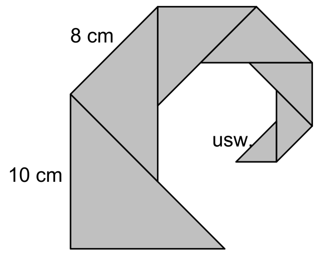
c) Löse $1 - \left(\frac{19}{20}\right)^n = 0.95$. Das ergibt $n = 58.4$.
Also mindestens 59 Spielrunden.

d) $\frac{1}{5}$ von 484 sind etwa 97 Zahlen 8. Nur 85 Achter sind zu wenig. Also vermutet Mr. Y, dass die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{5}$ nicht stimmt, sondern kleiner ist.
$H_0 : p = \frac{1}{5}$
$H_1 : p < \frac{1}{5}$
$n = 484$, also Normalverteilung. $\mu = np = 96.8$, $\sigma = \sqrt{npq} = 8.8$.
$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ mit $x = 85$: $z = -1.34$.
$\Phi(-1.34) = 0.0901 > \alpha$.
Folglich muss man H_0 beibehalten. Der Verdacht ist nicht berechtigt.

6. **Kurzaufgaben zu rechtwinkligen Dreiecken**

a) Man hat 5 E, 3 I, 2 R, 2 C, 2 K und je ein H, T, W, N, L, G, D.
$\dfrac{21!}{5! \cdot 3! \cdot 2!^3}$ Möglichkeiten

b) Flächen $F_1 = 50$, $F_2 = 32$ und somit $q_F = 0.64$.
$F = \dfrac{F_1}{1 - q_F} = 138.89\,\text{cm}^2$
Seitenlängen: $a_1 = 10$, $a_2 = 8$ und somit $q_s = 0.8$
Umfang aussen: $u_1 = \dfrac{a_1}{1 - q_s} = 50\,\text{cm}$
Boden: $10\,\text{cm}$
Umfang innen:
$b_1 = 10\sqrt{2} - 8$, $u_2 = \dfrac{b_1}{1 - q_s} = 30.71\,\text{cm}$
Ganzer Umfang: $u = 90.71\,\text{cm}$



c) Setze $P(\, t \,|\, f(t)\,)$.
Dann ist $Q(\, -t \,|\, f(t)\,)$ und $R(\, t \,|\, 0\,)$.
Fläche des Dreiecks:
$F = \dfrac{1}{2} \cdot 2t \cdot (3 - \dfrac{1}{2} \cdot t^2) = 3t - \dfrac{1}{2} \cdot t^3$
Fürs Maximum muss $F' = 0$ sein.
Also $3 - \dfrac{3}{2} \cdot t^2 = 0$.
Somit $t = \sqrt{2}$ und $f(t) = 2$.
Damit wird $P(\, \sqrt{2} \,|\, 2\,)$, $Q(\, -\sqrt{2} \,|\, 2\,)$, $R(\, \sqrt{2} \,|\, 0\,)$
und $F_{max} = 2\sqrt{2}$.