Mathematik

1. **Kurvenbetrachtungen**

   Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$.
   Die Ableitungen sind vorgegeben: $y' = f'(x) = \dfrac{x+4}{x^3}$, $y'' = f''(x) = -\dfrac{2x+12}{x^4}$

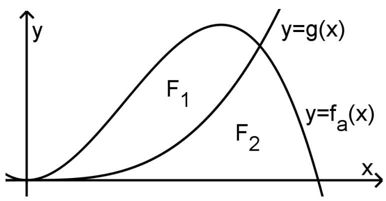
   a) Führe eine Kurvendiskussion durch.
   Gedankenstütze: Definitionsbereich, Polstellen, Asymptoten sowie die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrema inkl. Begründung für Maximum oder Minimum, Wendepunkte)

   b) Behauptung I: Die Wendetangente hat die Gleichung $y = \dfrac{1}{108} \cdot x + \dfrac{7}{6}$.
   Wahr oder falsch? Begründe!

   c) Behauptung II: Die Kurve schneidet die x-Achse im Winkel $\alpha = 45°$.
   Wahr oder falsch? Begründe!

2. **Flächen und Volumen**

   Gegeben sind zwei Funktionen:
   $y = f_a(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$ (wobei $a > 0$),
   $y = g(x) = x^3$.
   Die nebenstehende Skizze ist nicht massstäblich.



   Betrachte die im I. Quadranten unterhalb von $y = f_a(x)$ liegende Fläche, welche durch $y = g(x)$ in zwei Teilflächen unterteilt wird (siehe die Skizze).

   a) (Für diese Teilaufgabe ist voller Taschenrechnereinsatz gestattet)
   Setze $a = 2$, d.h. betrachte $y = f_2(x) = 24 \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$.

   a_1) In welchem Verhältnis stehen die entstandenen beiden Flächen?
   Berechne die Flächen F_1 und F_2 sowie das Verhältnis $F_1 : F_2$.

   a_2) Die ganze Situation rotiert nun um die x-Achse. So entstehen zwei Rotationskörper, nämlich einer durch Rotation von F_1, der andere durch Rotation von F_2. Berechne die Volumen V_1 und V_2 sowie das Verhältnis $V_1 : V_2$ der beiden Körper.

   a_3) Erkläre in ein bis zwei Sätzen den scheinbaren Widerspruch, dass die kleinere Fläche (aus der ersten Teilaufgabe) zum grösseren Volumen (aus der zweiten Teilaufgabe) führt.

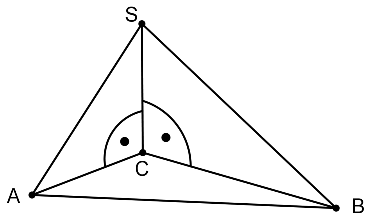
   b) Arbeite jetzt mit der allgemeinen Form von $y = f_a(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$.

   b_1) Berechne $\int f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int \Big(12 \cdot a \cdot x^2 - 3 \cdot x^3\Big)\mathrm{d}x =$

   b_2) Berechne, abhängig von a, die Flächen F_1 und F_2 und das Verhältnis $F_1 : F_2$.

3. **Pyramide**

Wir betrachten die dreiseitige Pyramide mit Bodenfläche ABC und Spitze S gemäss Figur.
Die Kante SC steht senkrecht auf die Bodenfläche.
Gegeben sind die Punkte A, B und C:
$A(1\,|\,2\,|\,2)$, $B(3\,|\,1\,|\,0)$, $C(-1\,|\,0\,|\,1)$.



a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene $\varepsilon(ABC)$

b) Berechne die Fläche F des Dreiecks ABC.
(Wer diese Teilaufgabe nicht lösen konnte, darf ersatzweise mit $F = 9$ *weiter arbeiten.)*

c) Das Volumen der Pyramide soll $V = 18$ betragen.
Bestimme die Koordinaten von S.
(Wer diese Teilaufgabe nicht lösen konnte, darf ersatzweise mit $S(-5\,|\,8\,|\,-7)$ *weiter arbeiten.)*

d) Berechne den Winkel zwischen der Geraden SA und der Ebene $\varepsilon(ABC)$

e) Ein Lichtstrahl geht von S aus durch A und wird dort an der Ebene $\varepsilon(ABC)$ reflektiert. Bestimme die Richtung des reflektierten Strahls.

4. **Berühren, Schneiden, oder Meiden?**
Eine Kugel k_1 ist gegeben durch $M_1(1\,|\,-2\,|\,5)$ und $r_1 = 5$.

a) Liegt der Punkt $P(5\,|\,-1\,|\,7)$ innerhalb oder ausserhalb von k_1? Begründe.

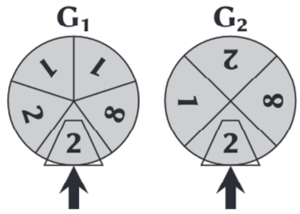
b) Berührt, schneidet, oder meidet k_1 die Ebene $\varepsilon : x + 2y - 2z - 3 = 0$?
(Allfällige Berührpunkte oder Abstände sind *nicht* gefragt.)

c) Berührt, schneidet, oder meidet k_1 die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$?
Bestimme die Koordinaten allfälliger Berühr- oder Schnittpunkte.

d) Die Kugel $k_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 2z + t = 0$ soll die Kugel k_1 in einem Kreis mit Radius $r = 3$ schneiden. Bestimme das Zentrum M_2, den Radius r_2 sowie t.

5. **Glücksräder**

Auf einer Chilbi stehen zwei Glücksräder (siehe die Figur). G_1 besteht aus fünf, G_2 aus vier gleich grossen Sektoren. Die Glücksräder bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im dargestellten Rahmen angezeigt wird.



Eine Spielrunde besteht darin, beide Glücksräder gleichzeitig zu drehen.
Der Spieleinsatz beträgt 2 Fr. Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Fr. ausbezahlt, andernfalls geht der Einsatz verloren.
Im besten Fall wird der Hauptgewinn von 14 Fr. erzielt (16 Fr. ausbezahlt).

a) Die Zufallsgrösse G beschreibt den Gewinn in Fr. bei einer Spielrunde.
Die Zufallsgrösse G kann also die Werte -2, 0, 2 und 14 annehmen.
Stelle eine Verteilungstabelle auf, berechne die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sowie $E(G)$ und $V(G)$.

b) Lohnt sich das Spiel für den Spieler oder für den Veranstalter?

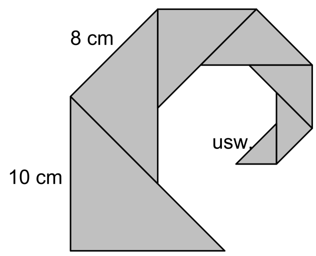
c) Mr. X möchte mit 95%-iger Sicherheit mindestens einmal den Hauptgewinn erzielen. Wie viele Spielrunden braucht er dazu (mindestens)?

d) Mr. Y beobachtet, dass das Glücksrad G_1 in 484 Spielrunden nur 85 Mal die Zahl 8 angezeigt hat.
Werte diese Beobachtung in einem ausführlich formulierten Hypothesentest aus. Was ist die Vermutung von Mr. Y? Ist sie berechtigt? ($\alpha = 5\%$).

6. **Kurzaufgaben zu rechtwinkligen Dreiecken**

a) Vom Wort RECHTWINKLIGEDREIECKE steht auf 21 Zetteln je ein Buchstabe. Wie viele verschiedene Wörter (Buchstabensequenzen) könnte man mit diesen 21 Zetteln hinlegen?

b) Aus unendlich vielen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken wird eine Spirale gebildet (siehe die Figur).
Man kennt die Katheten vom ersten Dreieck: 10 cm und die Katheten vom zweiten Dreieck: 8 cm und weiss, dass die Kathetenlängen eine Geometrische Folge bilden.
Berechne Fläche und Umfang dieser Spirale.
Hinweis: Die Trennlinien zwischen den Dreiecken gehören nicht zum Umfang.



c) Gegeben ist die Parabel $y = f(x) = 3 - \dfrac{1}{2} \cdot x^2$ (siehe die Figur).
P (im I. Quadranten) und Q liegen auf der Parabel. Die Strecke PQ ist parallel zur x-Achse. PR ist senkrecht zur x-Achse.
Das Dreieck PQR soll maximale Fläche haben.
Bestimme die zugehörigen Koordinaten von P, Q und R sowie die maximal mögliche Fläche.