Mathematik-Musterlösung

Klasse 6C O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**

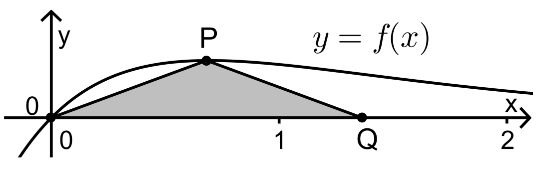
$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$.
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$ (Notieren der Ableitungen war nicht verlangt)
$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} - 4 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$

a) Nullstelle: $N(\,0\,|\,0\,)$
Extremum: $f'(x) = 0$, also $E(\,\ln(2)\,|\,\frac{1}{4}\,)$
Weil $f''(\ln(2)) = -\frac{1}{2} < 0$, ist es ein lokales Maximum.
Wendepunkt: $f''(x) = 0$, also $W(\,2 \cdot \ln(2)\,|\,\frac{3}{16}\,)$

b) $m = f'(2 \cdot \ln(2)) = -\frac{1}{8}$.
Alles Einsetzen bei $y = m \cdot x + v$ ergibt $v = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{3}{16}$.
Also Tangente: $y = -\frac{1}{8} \cdot x + \frac{\ln(2)}{4} + \frac{3}{16}$

c) $V = \pi \cdot \int_0^\infty (f(x))^2 \, dx = \frac{\pi}{12}$

d) Setze $P(\,t\,|\,f(t)\,)$.

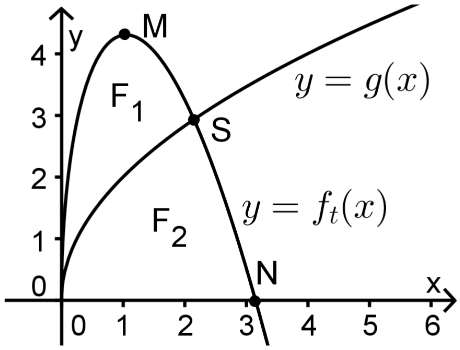


Das Dreieck hat Basis $2t$ und Höhe $f(t)$,
also ist die Fläche $F(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot f(t) = t \cdot f(t)$.
$F'(t) = 0$ ergibt $t = 0$ (das ist ein Minimum) und $t = 1.4456$.
Einsetzen ergibt der Reihe nach:
$P(\,1.4456\,|\,0.1801\,)$
$Q(\,2.8912\,|\,0\,)$
und $F_{max} = 0.2603$

2. **Parameter**

$y = f_t(x) = (t - 2x) \cdot \sqrt{x}$
(wobei $t > 0$)

$y = g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$.



a) $f_t'(x) = 0$ ergibt $x_{max} = \dfrac{t}{6}$.

Einsetzen ergibt $y_{max} = \dfrac{\sqrt{6}}{9} \cdot t^{\frac{3}{2}}$, somit $M\left(\dfrac{t}{6} \,\middle|\, \dfrac{\sqrt{6}}{9} \cdot t^{\frac{3}{2}}\right)$.

$f(x) = g(x)$ ergibt $x = 0$ und $x = \dfrac{t-2}{2}$.

Einsetzen ergibt $S(\dfrac{t-2}{2} | \sqrt{2(t-2)})$.

$f_t(x) = 0$ ergibt $N\left(\dfrac{t}{2} \,|\, 0\right)$ nebst der Nullstelle $(\,0\,|\,0\,)$.

b) Aus $x_{max} = \dfrac{t}{6}$ hat man $t = 6x$.

Einsetzen bei y_{max} ergibt $y = k(x) = 4 \cdot x^{\frac{3}{2}}$.

c) $m_1 = f'(\dfrac{t-2}{2}) = \dfrac{-\sqrt{2}(t-3)}{\sqrt{t-2}}$,

$m_2 = g'(\dfrac{t-2}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{t-2}}$.

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ergibt $t = 4$.

d) Die Gesamtfläche ist $F = \displaystyle\int_0^{\frac{t}{2}} f_t(x)\,dx = \dfrac{\sqrt{2}}{15} \cdot t^{\frac{5}{2}}$.

$f_t(x) = g(x)$ ergibt $x = 0$ und $x = \dfrac{t-2}{2}$.

Die Fläche zwischen den Kurven ist $F_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{t-2}{2}} (f_t(x) - g(x))\,dx = \dfrac{\sqrt{2}}{15} \cdot (t-2)^{\frac{5}{2}}$.

Aus $F_1 = \dfrac{F}{2}$ erhält man $t = 8.2596$

3. **Dreieck und Lichtstrahl**

$A(15\,|-1\,|\,15)$, $B(9\,|\,11\,|\,6)$, $C(3\,|\,3\,|\,17)$, $P(13\,|\,1\,|\,23)$, $Q(6\,|\,11\,|\,12)$.
$\varepsilon : x + 2y + 2z - 43 = 0.$

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||} = 0.493$, folglich $\alpha = 60.461°$

$F = \dfrac{1}{2} \cdot ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = 90E^2$ (Einheit nicht verlangt)

b) Einsetzen in die HNF: $\dfrac{x + 2y + 2z - 43}{3} = \dfrac{13 + 2 + 26 - 43}{3} = 6$

c) Spiegle P an ε:

$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$l \cap \varepsilon$ ergibt $t = 2$ und somit $L(11\,|-3\,|\,19)$
oder direkt $P'(9\,|-7\,|\,15)$ mit $t = -4$.
$P'Q \cap \varepsilon$ ergibt R.

$\overrightarrow{P'Q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix}$ oder gekürzt $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P'Q : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P'Q \cap \varepsilon$ ergibt $t = 2$ und somit $R(7\,|\,5\,|\,13)$.
Wer Q spiegelt, erhält $Q'(4\,|\,7\,|\,8)$ bzw. $L(5\,|\,9\,|\,10)$.

$\overrightarrow{PQ'} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$ oder gekürzt $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) Man hat $AB : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $CR : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

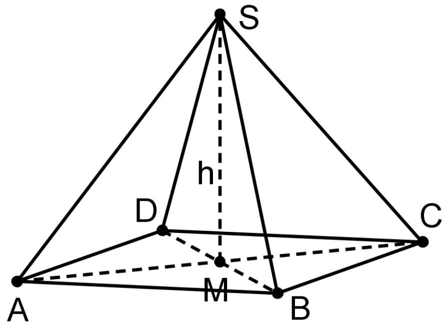
Die Richtungsvektoren sind absichtlich nicht gekürzt.
Lösen des Gleichungssystems ergibt $t_1 = \dfrac{2}{3}$ und $t_2 = 2$.
Das ergibt $S(11\,|\,7\,|\,9)$.
Weil $t_1 < 1$, liegt S zwischen A und B.
Weil $t_2 > 1$, liegt R zwischen C und S.

Mit dem Ersatzwert $(5\,|\,4\,|\,15)$ erhält man den gleichen Schnittpunkt S, den gleichen Wert für t_1, aber $t_2 = 4$.
(Der Ersatzwert ist der Mittelpunkt zwischen C und dem richtigen R.)

4. **Pyramide und Kugel**

Gegeben sind die Punkte $A(\,0\,|\,11\,|\,7\,)$, $B(\,10\,|\,21\,|\,2\,)$ und $C(\,20\,|\,10\,|\,0\,)$.
Die Pyramide hat Höhe $h = 30$.

$k : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y + 6z - 59 = 0$



a) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Kontrolliere: $||\overrightarrow{BA}|| = ||\overrightarrow{BC}|| = 15$ und $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
Beides ist erfüllt.

b) D: $\overrightarrow{BA}$ in C anhängen: $D(\,10\,|\,0\,|\,5\,)$.
$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 30 \\ 210 \end{pmatrix}$ oder gekürzt $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.
Somit $ABCD : 5x + 2y + 14z - 120 = 0$ (beispielsweise mit A).
$M(\,10\,|\,\frac{21}{2}\,|\,\frac{7}{2}\,) = M(\,10\,|\,10.5\,|\,3.5\,)$ ist Mittelpunkt von AC.
h hat Richtung von $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$, aber der hat so Länge 15, also ist $\overrightarrow{MS} = \pm \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 28 \end{pmatrix}$.
Das ergibt $S(\,20\,|\,\frac{29}{2}\,|\,\frac{63}{2}\,) = S(\,20\,|\,14.5\,|\,31.5\,)$
oder als 2. mögliche Lösung $S(\,0\,|\,\frac{13}{2}\,|\,-\frac{49}{2}\,) = S(\,0\,|\,6.5\,|\,-24.5\,)$

c) (ohne Taschenrechner)
$(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+3)^2 = 59 + 16 + 16 + 9 = 100$.
Also $Z(\,4\,|\,-4\,|\,-3\,)$, $r = 10$.

d) Bestimme den Abstand von Z zur Ebene $ABCD$.
$\frac{5x + 2y + 14z - 120}{15} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 14 \cdot (-3) - 120}{15} = -10$.
Also ist der Abstand von Z zur Ebene genau der Kugelradius.
k berührt die Ebene $ABCD$.

Der Berührpunkt $P(\,\frac{22}{3}\,|\,-\frac{8}{3}\,|\,\frac{19}{3}\,)$ war nicht verlangt, aber wer von Z aus ein Lot auf die Ebene legt und dieses Lot mit der Ebene schneidet, erhält zunächst den Punkt P und stellt dann fest, dass $||\overrightarrow{ZP}|| = 10 = r$ ist.

5. **Bauteile**

$p = 0.04$

a) Binomialverteilung

$$\sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} \cdot 0.04^x \cdot 0.96^{20-x} = 0.9561$$

b) Normalverteilung

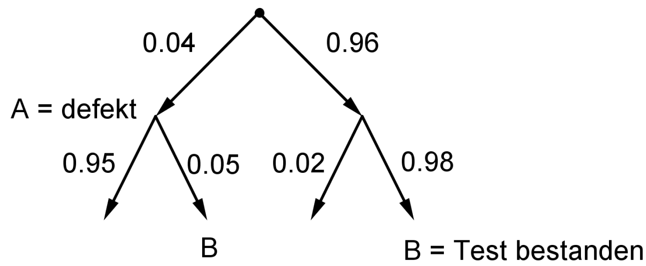
$\mu = 4000 \cdot 0.96 = 3840$, $\sigma = \sqrt{4000 \cdot 0.86 \cdot 0.04} = 12.3935$.

$z = \dfrac{3850 - 3840}{\sigma} = 0.8069$.

Man will mindestens 3850 funktionstüchtige Bauteile, also

$1 - \Phi(0.8069) = 1 - 0.7901 = 0.2099$. Das sind ziemlich genau 21%.

c) Bedingte Wahrscheinlichkeit.



A: Das Bauteil ist defekt, B: Das Bauteil hat den Prüftest bestanden.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.04 \cdot 0.05}{0.04 \cdot 0.05 + 0.96 \cdot 0.98} = 0.0021.$$

d) Hypothesentest

$H_0 : p = 0.04$, $H_1 : p > 0.04$. (7 defekte von 75 ist zu viel)

$$s = \sum_{x=7}^{75} \binom{75}{x} \cdot 0.04^x \cdot 0.96^{75-x} = 0.0305 < \alpha.$$

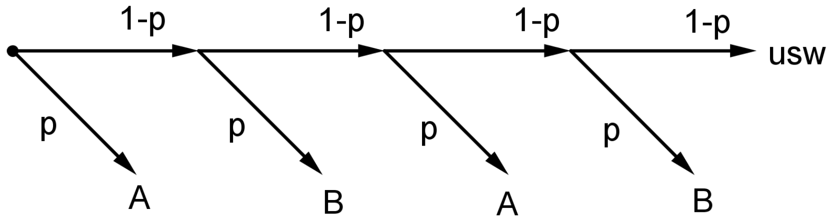
Also muss man H_0 verwerfen. Der Verdacht des Kunden ist berechtigt.

6. **Ein Spiel**

a) Entweder mit einem Baumdiagramm: $p = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot 3! = \frac{5}{22}$
(3! für die Anzahl Pfade)

Oder günstige durch mögliche Anzahlen: $p = \dfrac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5}{22}$.

b) Das Baumdiagramm sieht so aus:



$\left(\frac{17}{22}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{22}\right) = 0.1357.$ Mit dem Ersatzwert: $\left(\frac{16}{21}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{21}\right) = 0.1382$

c) Die Gewinn-Wahrscheinlichkeit für A ist
$G(A) = p + (1-p)^2 \cdot p + (1-p)^4 \cdot p + (1-p)^6 \cdot p + \ldots$.
Man erhält eine geometrische Reihe mit $a_1 = p$ und $q = (1-p)^2$.
Das ergibt $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{22}{39} = 0.5641$
Mit dem Ersatzwert erhält man $\frac{21}{37} = 0.5676$

d) Verteilungstabelle:

X	1	2	3	4	usw
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{17}{22} \cdot \frac{5}{22}$	$\left(\frac{17}{22}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{22}\right)$	$\left(\frac{17}{22}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{22}\right)$	

d$_1$) $\left(\frac{17}{22}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{22}\right) = 0.1049$
d$_2$) $\left(\frac{17}{22}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{22}\right)$
d$_3$) $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{17}{22}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{22}\right) = \frac{22}{5} = 4.4$ Züge im Durchschnitt.

Die Zahlen für den Ersatzwert (ohne Verteilungstabelle) sind:

d$_1$) $\left(\frac{16}{21}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{21}\right) = 0.1053$
d$_2$) $\left(\frac{16}{21}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{21}\right)$
d$_3$) $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{16}{21}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{21}\right) = \frac{21}{5} = 4.2$ Züge im Durchschnitt.