

Mathematik

Klasse 6C

O. Riesen

1. Kurvenbetrachtung

Gegeben ist $y = f_a(x) = \frac{x^2 - 2a}{2x - a}$.

a) Setze $a = 9$, d.h. betrachte $y = f_9(x) = \frac{x^2 - 18}{2x - 9}$.

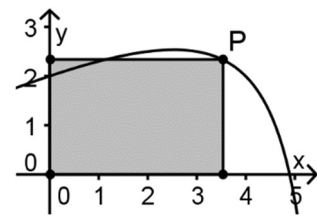
Bestimme: Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extrempunkte inkl. Nachweis, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

b) Setze $a = 2$.

Die Kurve und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein kleines endliches Flächenstück im II. Quadranten. Berechne diese Fläche.

c) Setze $a = 12$.

Die Skizze zeigt einen Kurvenbogen mitsamt dem Kurvenpunkt P. Das dargestellte Rechteck rotiert um die y-Achse und bildet so einen Zylinder. Wo muss der Punkt P liegen, damit dieser Zylinder maximales Volumen erhält und wie gross ist dieses maximal mögliche Zylindervolumen?



d) Setze $a = 6$.

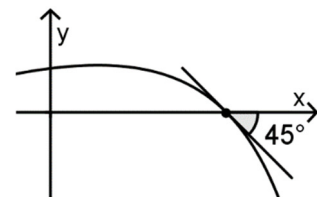
Vom Koordinatenursprung aus kann man zwei Kurventangenten legen. Bestimme die Gleichungen dieser Kurventangenten und die Koordinaten der Berührungspunkte.

2. Parameter gesucht (Thema mit Variationen)

Gegeben ist $y = f_a(x) = \frac{x^2 - 2a}{2x - a}$. Dabei ist $a > 0$ und $a \neq 8$.

Die Teilaufgaben sind unabhängig.

a) Bestimme die Koordinaten der Nullstelle auf der positiven x-Achse, abhängig von a. Für welchen Wert von a misst der dargestellte Winkel genau 45° ? (siehe die Figur)



b) Die schräge Asymptote soll durch den Punkt $(0 | 1)$ gehen. Bestimme a.

c) Weise nach, dass alle Kurven, unabhängig von a, durch den Punkt $(4 | 2)$ gehen. Für welchen Wert von a schneiden sich die zwei Kurven $y = f_6(x)$ und $y = f_a(x)$ in diesem Punkt $(4 | 2)$ rechtwinklig?

d) Zeige, dass die Kurve $y = f_a(x)$ nie einen Wendepunkt haben kann.

3. Viereck

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(2 \mid 1 \mid 3)$, $B(7 \mid 11 \mid 13)$, $C(6 \mid 3 \mid 17)$, $D(3 \mid -3 \mid 11)$.

- Weise nach, dass das Viereck ABCD in einer Ebene liegt. Bestimme die Koordinatengleichung dieser Ebene.
- Berechne den Winkel α (Scheitelpunkt A) und den Umfang dieses Vierecks.
- Um was für ein Viereck handelt es sich (Rhombus, Rechteck, ...)? Beschreibe das Viereck so genau wie möglich.
- Berechne die Fläche dieses Vierecks.
- Das Viereck ABCD hat einen Umkreis. (Das ist nicht nachzuweisen.) Bestimme Zentrum und Radius dieses Umkreises.

4. Kugel und Gerade

Gegeben ist die Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 8y - 4z + 3 = 0$

und die Gerade $g: (4 \mid 12 \mid 6), (6 \mid 10 \mid 7)$

- Löse diese Teilaufgabe "von Hand".
Bestimme Mittelpunkt und Radius von k .
[Wer Teil a) nicht schafft, rechnet mit den Ersatzwerten $M(6 \mid -2 \mid 1)$ und $r = 9$ weiter.]
- Der Punkt $P(14 \mid -1 \mid z)$ liegt auf der Kugeloberfläche, wobei $z > 0$. Bestimme die Gleichung der Tangentialebene im Punkt P.
- Bestimme die Koordinatengleichungen der Tangentialebenen an die Kugel k , welche senkrecht zu g stehen (alle Lösungen!).
- Bestimme den kürzesten Abstand zwischen der Kugel k und der Geraden g inkl. der Koordinaten der beiden Punkte (auf k resp. g), welche am nächsten zueinander liegen.

5. Bootsrundfahrten

Eine Schifffahrtsgesellschaft bietet "Prague-Sightseeing"-Rundfahrten auf der Moldau an. Ein Boot fasst maximal 250 Personen. Aus Erfahrung weiss man, dass 11% der Leute, die eine Platzkarte gebucht haben, nicht erscheinen (so genannte "No-Shows"). Anders formuliert: Für jede Buchung besteht eine Wahrscheinlichkeit von 11%, dass die Person nicht erscheint.

- a) Eine Gruppe von 20 Personen erscheint vollzählig. Sie erhalten Platzkarten für fünf Bankreihen zu je vier Plätzen. Auf wie viele Arten kann man die 20 Personen auf die fünf Bankreihen verteilen? (Die Sitzordnung innerhalb einer Bankreihe wird **nicht** berücksichtigt.)
- b) Eine Gruppe hat Platzkarten für 50 Personen gebucht. Dazu zwei Kurzfragen:
 - b₁) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen höchstens zwei Personen?
 - b₂) Welche Anzahl erscheinender Personen ist am wahrscheinlichsten?
- c) Die Schifffahrtsgesellschaft lässt mehr als die 250 Plätze buchen, um leere Plätze auf den Fahrten zu vermeiden. Wie viele Platzkarten darf die Gesellschaft buchen lassen, wenn sie mit mindestens 92.5%-iger Sicherheit niemanden zurückweisen will (weil zu viele Leute erscheinen)?
- d) Die Schifffahrtsgesellschaft hat das Gefühl, dass der prozentuale Anteil der "No-Shows" zugenommen hat und lässt dazu die nächsten 1000 Buchungen überprüfen. Davon sind 130 Personen nicht erschienen.
Führe dazu einen ausführlich formulierten Hypothesentest durch. (Nullhypothese, Gegenhypothese, Signifikanzniveau, statistischer Rückschluss, $\alpha = 5\%$)

6. Zwei Spiele

Spiel A:

Die sechs Seitenflächen eines Würfels sind mit den Zahlen 1, 1, 1, 2, 2, 4 angeschrieben. Zu Beginn des Spiels leistet man einen Einsatz von 2 Fr. Dann wirft man den Würfel zweimal. Wenn man im ersten Wurf **keine** 4 erhält, dann erhält man die im zweiten Wurf erzielte Zahl (in Fr.) ausbezahlt. Wenn man im ersten Wurf eine 4 erhält, dann erhält man das Doppelte der im zweiten Wurf erzielten Zahl (in Fr.) ausbezahlt.

- a₁) Zeichne das vollständige Baumdiagramm zu diesem Spiel.
- a₂) Ein Spieler hat soeben seinen Einsatz von 2 Fr. (wieder) ausbezahlt erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielte er im ersten Wurf eine 4?
- a₃) Die Zufallsgrösse X bezeichne den erzielten Gewinn. Berechne $E(X)$ und $V(X)$.

Spiel B:

In einem Behälter hat man vier Kugeln, die mit der Zahl "2" angeschrieben sind und dazu n Kugeln, die mit der Zahl "-1" angeschrieben sind. Dabei soll $n > 3$ sein. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff. Das Produkt der gezogenen Zahlen ist der Gewinn (oder, falls das Produkt negativ wird, der Verlust).

- b₁) Stelle die Verteilungstabelle zu diesem Spiel auf.
- b₂) Für welche Werte von n erzielt der Spieler im Durchschnitt einen (positiven) Gewinn (egal wie gross dieser Gewinn ist)?
