

Mathematik

Klasse 6L

O. Riesen

1. Kurvenbetrachtung

Für $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = (t + 2 - t \cdot x) \cdot e^x$ eine Funktion gegeben.

- Setze $t = 3$ und bestimme die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte. (Nullstelle, Extrempunkte inkl. die Angabe, ob es ein Maximum oder Minimum ist, Wendepunkt)
- Setze $t = \frac{1}{2}$. Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche. (Das Integral ist ausführlich, "von Hand gerechnet" herzuleiten.)
- Bestimme die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von t . Alle Wendepunkte aller betrachteten Kurven liegen auf einer weiteren Funktion. Bestimme deren Funktionsgleichung.
- Bestimme die Steigung der Wendetangente in Abhängigkeit von t . Die Wendetangente soll die x -Achse unter einem möglichst kleinen Winkel schneiden. Bestimme den zugehörigen Wert t und diesen minimalen Winkel.

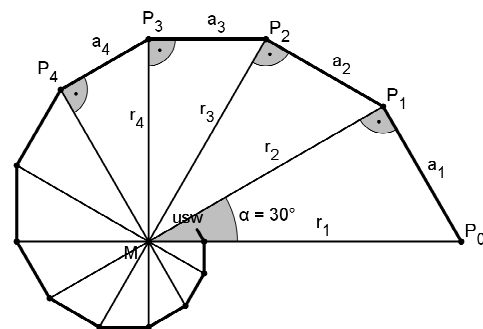
2. Spirale

Betrachte die nebenstehende Figur:

Zwei aufeinanderfolgende Radialstrecken r_n und r_{n+1} schneiden sich in M unter dem stets gleichen Winkel α .

Alle Dreiecke MP_nP_{n+1} sind rechtwinklig.

Die aus unendlich vielen Teilstrecken zusammengesetzte Spirale beginnt in P_0 und verläuft entlang der Strecken a_1, a_2, a_3, \dots



Für die Teilaufgaben a) bis c) gilt $\alpha = 30^\circ$, $r_1 = 10$ cm.

- Weise nach, dass die Radialstrecken r_1, r_2, r_3, \dots eine geometrische Folge bilden und berechne, wie viele Radialstrecken länger sind als 1 mm.
- Ein Käfer startet im Punkt P_0 und bewegt sich auf der Spirale entlang der Strecken a_1, a_2, a_3, \dots . Auf welchem Teilstück a_n befindet er sich, wenn er 98% der Gesamtlänge der Spirale zurückgelegt hat?
- Berechne die von den in der Figur dargestellten 12 Dreiecken überdeckte Fläche.
- Finde eine allgemeine Formel für die Länge der gesamten Spirale, welche durch die Strecken a_1, a_2, a_3, \dots gebildet wird (ausgedrückt durch r_1 und α).

3. Dreieck

Gegeben ist das Dreieck ABC durch $A(6 \mid 10 \mid -8)$, $B(-5 \mid -5 \mid 0)$ und $C(-10 \mid -10 \mid 0)$.
(Die drei Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.)

- Spiegle den Punkt B an der Geraden AC und ergänze so das Dreieck zu einem Drachenviereck ABCD mit Symmetrieachse AC. Bestimme die Koordinaten von D.
- Das Dreieck ABC ist Bodenfläche eines geraden dreiseitigen Prismas, von welchem die Deckelfläche $\overline{A} \overline{B} \overline{C}$ in der Ebene $\varepsilon: 2x - 2y - z - 18 = 0$ liegt.
 - Berechne die Koordinatengleichung der Ebene durch A, B und C.
 - Zeige, dass diese Ebene zu ε parallel liegt.
 - Berechne die Koordinaten von \overline{A} , \overline{B} und \overline{C} .
 - Berechne das Volumen des Prismas.
- Zeige, dass der Punkt $P(-1 \mid 1 \mid -4)$ in der gleichen Ebene liegt wie A, B und C. Liegt dieser Punkt P innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks ABC? (Begründe!)

4. Kugel

Gegeben ist die Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z - 43 = 0$

- Berechne Mittelpunkt und Radius dieser Kugel k. (Löse Teilaufgabe a) "von Hand".)
[Wer diesen Teil nicht schafft, rechnet mit $M(7 \mid 6 \mid -3)$ und $r = 9$ weiter.]
- Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte sowie den spitzen Schnittwinkel zwischen der Kugel k und der Geraden g: $(-1 \mid 3 \mid -1)$ $(-1 \mid 4 \mid 0)$.
- k schneidet die Ebene $x + 2y - 2z - 7 = 0$ in einem Kreis. Bestimme Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.
- Berechne den kürzesten Abstand von k zur Kugel $k_2: M_2(-6 \mid 7 \mid \frac{1}{2})$, $r_2 = 25$.

5. Statistische Überlegungen von Viehzüchtern

Auf Grund langjähriger Erfahrungen rechnen Viehzüchter für die Geburt eines weiblichen Kalbes mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$. Die männlichen Jungtiere nennen wir Muni und die weiblichen Jungtiere nennen wir Gushti (wie z.B. im Kanton Bern üblich).

- Bei einem Bauern kommen in einem Jahr 30 Kälber auf die Welt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mehr Gushti als Muni?
- Die Mitglieder eines Bauernverbandes registrieren in einem Jahr 700 Geburten von Kälbern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mehr als 400 Gushti? Rechne mit der Normalverteilung.
- Die Mitglieder des Bauernverbandes wollen im nächsten Jahr mindestens 450 Gushti haben. Wie viele Kälber müssen mindestens auf die Welt kommen, damit dieses Ziel mit 99%-iger Sicherheit erreicht wird?
- Die Statistikerin des Bauernverbandes hat das Gefühl, dass die angenommene Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ nicht stimmt. Sie analysiert die Zahlen der letzten zwei Monate und stellt fest, dass von 120 Kälbern genau 65 Gushti waren. Führe zu diesen Angaben einen ausführlich formulierten Hypothesentest durch.
($\alpha = 5\%$)

6. Unabhängige Aufgaben aus verschiedenen Teilgebieten

- a) Eine Maschine stellt Pralinen in 5 Sorten her und verpackt sie zufällig in Säckchen zu 25 Stück. Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein solches Säckchen mit 25 Pralinen zu füllen, wenn jede Sorte mindestens zweimal vorkommen soll?
Es gibt keine Anordnung der Pralinen innerhalb des Säckchens.
Und selbstverständlich hat es von allen Sorten genügend Pralinen vorrätig.
- b) In einem Behälter hat man 2 rote, eine schwarze und eine unbekannte Anzahl weisser Kugeln. Man zieht (höchstens) drei Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Wenn man die schwarze Kugel zieht (egal in welcher Ziehung), dann verliert man sofort 24 \$ und das Spiel ist zu Ende.
Wenn man eine rote Kugel in der ersten (resp. zweiten, resp. dritten) Ziehung erwischt, dann gewinnt man 5 \$ (resp. 15 \$, resp. 20 \$) und das Spiel ist zu Ende.
Wenn man in den drei Ziehungen weder die schwarze noch eine rote Kugel gezogen hat, dann gewinnt man nichts.
Wie viele weisse Kugeln muss es im Behälter haben, damit das Spiel fair ist?
- c) Einem Quadrat von 4 Einheiten Seitenlänge wird ein Parabelbogen gemäss Figur einbeschrieben. Diesem Parabelbogen wird nun ein Kreis einbeschrieben, der den Parabelbogen und die Quadratseite berührt. (Die ganze Figur ist achsensymmetrisch.)
Berechne den Kreisradius.
(Hinweis: Die Parabelgleichung in einem geschickt gewählten Koordinatensystem ist ein wichtiges Zwischenergebnis.)

