

Mathematik

Klasse 6C

O. Riesen

1. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cdot e^x$

- Bestimme die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstelle, Extremum, Wendepunkt) sowie die Gleichung der Wendetangente.
- Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Funktionskurve liegende Fläche.
(Das Integral ist ausführlich, "von Hand gerechnet", herzuleiten.)
- (mit Taschenrechnereinsatz.) Die im I. Quadranten unterhalb von $y = f(x)$ liegende Fläche wird durch die Kurve zu $y = g(x) = \frac{x-1}{3} \cdot e^x$ in zwei nahezu gleich grosse Teilflächen zerschnitten. Welche Teilfläche ist grösser?

2. Parameter bestimmen (Thema mit Variationen)

(Die folgenden drei Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.)

- Die Funktion $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot (x - a)$ soll die positive x-Achse im Winkel von $\alpha = 30^\circ$ schneiden. Berechne a.
- Die von der Kurve zu $y = b \cdot x - x^2$ (wobei $b > 0$ sein soll) und der Geraden $y = x$ vollständig umschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers soll $V = \pi/5$ betragen. Berechne b.
- Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{c \cdot x}{x^2 + d}$. Die zugehörige Kurve hat eine Wendetangente mit der Gleichung $y = -x + 3$. Berechne c und d.

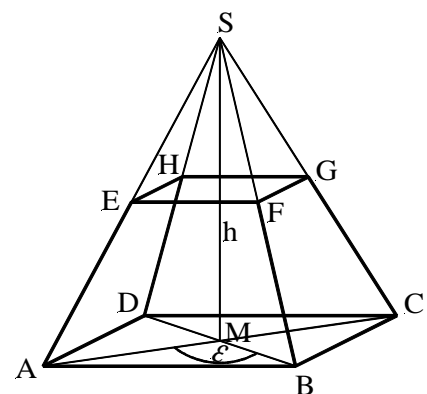
3. Pyramide und Pyramidenstumpf

Die Bodenfläche ABCD der dargestellten Pyramide ist ein Parallelogramm, von dem man die Eckpunkte A und B sowie den Diagonalschnittpunkt M kennt.

$A(3 \mid 3 \mid 18)$, $B(10 \mid 10 \mid 18)$, $M(10 \mid 1 \mid 0)$.

Weiter weiss man, dass die Höhe MS auf die Ebene ABCD senkrecht steht und $h = 12$ beträgt.

- Berechne den Winkel $\varepsilon = \angle(AMB)$
- Bestimme die Koordinaten von C, D und S.



Von der Pyramide wird in halber Höhe parallel zur Bodenfläche eine kleinere Pyramide abgeschnitten. Dadurch bleibt ein Pyramidenstumpf übrig.

- Bestimme die Koordinatengleichung der Schnittebene EFGH.
- Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfs.

4. Medizinische Tests

Wir betrachten medizinische Tests, um eine Krankheit RSR zu diagnostizieren. Wenn ein positives Testergebnis vorliegt, dann besteht eine gewisse Gefahr, dass die Testperson an RSR erkrankt ist. Bei positivem Testergebnis sind weitere Abklärungen nötig, die uns hier nicht interessieren.

Die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis betrage 7%.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man bei 15 getesteten Personen mehr als drei positive Testergebnisse?
- In einer Massenuntersuchung werden 12'000 Personen getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man weniger als 800 oder mehr als 900 positive Testergebnisse?

Jetzt berücksichtigen wir weiter, dass bei einer an RSR erkrankten Person mit 83%-iger Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis eintritt, dass aber auch eine gesunde Person mit 3%-iger Wahrscheinlichkeit irrtümlicherweise ein positives Testergebnis erhält. Es gilt immer noch, dass insgesamt die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis 7% beträgt.

- Welcher Anteil der Bevölkerung ist an RSR erkrankt? Oder anders gefragt: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person an RSR erkrankt ist?

(Falls dir die Lösung zu c) nicht gelingt, dann rechne ersatzweise weiter mit 6% erkrankten Personen innerhalb der Bevölkerung.)

- Mr. X hat soeben ein positives Testergebnis mitgeteilt erhalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er tatsächlich an RSR erkrankt?

5. Faire Spiele

Auf einem Jahrmarkt steht ein Glücksrad, welches mit $p = 0.4$ das Gewinnsymbol ☺ zeigt. Verschiedene Gaukler bieten dir faire Spiele an.

- Gaukler A sagt: "Zuerst zahlst du deinen Einsatz. Dann darfst du das Glücksrad einmal drehen. Wenn du das ☺ erhältst, dann zahle ich dir 6 Fr. Andernfalls erhältst du nichts." Welchen Einsatz wird der Gaukler verlangen, damit das Spiel fair ist?
- Gaukler B sagt: "Zuerst zahlst du deinen Einsatz. Dann darfst du das Glücksrad dreimal drehen. Für jedes ☺, das du erhalten hast, zahle ich dir 5 Fr."
Die Zufallsgrösse X stelle den Betrag dar, den du vom Gaukler erhalten hast. Stelle die Verteilungstabelle auf und berechne $E(X)$. Welchen Einsatz muss Gaukler B verlangen, damit dieses Spiel fair ist?
- Verallgemeinere das Resultat von Aufgabe b). Angenommen, du darfst das Glücksrad n mal drehen und für jedes ☺ erhältst du vom Gaukler den Betrag b ausbezahlt: wie gross muss dein Einsatz sein, damit das Spiel fair ist? Bestimme diesen Einsatz (in Abhängigkeit von n , b und p).
- Gaukler C sagt: "Zuerst zahlst du deinen Einsatz. Dann wirfst du einen (üblichen, symmetrischen) Würfel. Die gewürfelte Zahl gibt an, wie oft du das Glücksrad drehen darfst. Für jedes ☺, das du dann erhalten hast, zahle ich dir 4 Fr." Welchen Einsatz wird Gaukler C verlangen, damit dieses Spiel fair ist?

6. Kurzaufgaben "Rechtecke" aus verschiedenen Gebieten

- Wie viele Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes RECHTECKE bilden? (Jeder der neun Buchstaben ist pro Wort genau einmal zu verwenden.)
- Zeige, dass die vier Punkte $(3 \mid 5 \mid 6)$, $(5 \mid 6 \mid 11)$, $(6 \mid 4 \mid 5)$ und $(8 \mid 5 \mid 10)$ Eckpunkte eines Rechtecks ABCD sind. Bezeichne die gegebenen Punkte korrekt.
- Vom Rechteck ABCD kennt man $A(4 \mid 1 \mid 5)$ und $D(7 \mid 5 \mid 3)$ und weiss, dass B auf der Geraden $g: (8 \mid 6 \mid 2) (9 \mid 9 \mid 0)$ liegt. Berechne die Koordinaten von B und von C.
- Eine Festtagstorte bestehe aus 4 gleich hohen, zylinderförmigen Schichten. Die Figur mit den vier Rechtecken zeigt einen Querschnitt mit allen benötigten Massen, wobei die Radien der einzelnen Schichten eine geometrische Folge bilden. Wie viele Personen können ein Stück dieser Torte geniessen, wenn man pro Person 270 cm^3 berechnet?

