

Lösung Matura 6G (2009)

Aufgabe 1a)

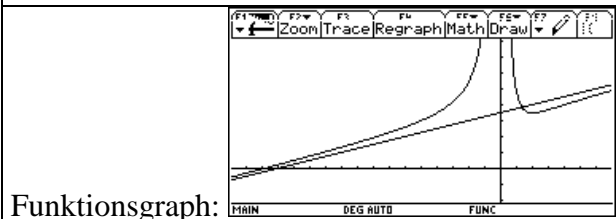
Definiere die Funktion.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Asymptoten $x = 0, y = x/4 + 7/2$

Nullstelle $(-14.88 \mid 0)$

Minimum $(2 \mid 7/2)$, Wendepunkt $(4 \mid 4)$



Funktionsgraph:

Gleichung der Wendetangente:

$$y = \frac{5}{16}x + \frac{11}{4}$$

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
Define y1(x) = (x^3 + 14x^2 - 12x + 16) / (4x^2)
expand(y1(x))
x - 3/x + 4/x^2 + 7/2
Define y2(x) = x/4 + 7/2
define y2(x) = x/4 + 7/2
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
zeros(y1(x), x) (-14.8788)
zeros(d/dx(y1(x)), x) (2)
y1(2) 7/2
zeros(d^2/dx^2(y1(x)), x) (4)
y1(4) 4
y1(4)
    
```

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
zeros(d^2/dx^2(y1(x)), x) (4)
y1(4) 4
d/dx(y1(x)) | x=4 5/16
solve(4 = 5/16 * 4 + v, v) v = 11/4
y = 5/16 * x + 11/4
y = 5/16 * x + 11/4
y = 5/16 * x + 11/4
    
```

Aufgabe 1b)

Berechne den Schnittpunkt $S(4/3 \mid 23/6)$

die beiden Steigungen,

dann den Zwischenwinkel. 69.212°

```

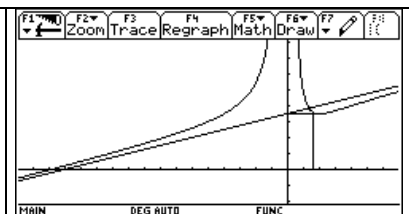
F1 F2 F3 F4 F5 F6
solve(y1(x) = y2(x), x) x = 4/3
y1(x) | x = 4/3 23/6
d/dx(y1(x)) | x = 4/3 -23/16
d/dx(y2(x)) | x = 4/3 1/4
tan^-1(1/4) - tan^-1(-23/16) 69.2118
tan^-1(1/4) - tan^-1(-23/16)
    
```

Aufgabe 1c)

Das Rechteck hat Seiten x und $f(x)$. Also muss $x \cdot f(x)$ minimal werden.

Ableiten und nullsetzen. Nur $x = 1$ liefert einen Punkt im I. Quadranten.

Also $P(1 \mid 19/4)$

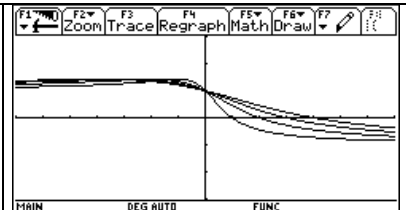


```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
tan^-1(1/4) - tan^-1(-23/16) 69.2118
x * y1(x) (x^3 + 14x^2 - 12x + 16) / (4x)
solve(d/dx((x^3 + 14x^2 - 12x + 16) / (4x)) = 0, x)
x = -2 * (sqrt(2) + 2) or x = 2 * (sqrt(2) - 2) or x = 1
y1(1) 19/4
y1(1)
    
```

Aufgabe 2a)

Hinweis: Anzeige für die Werte $t = 1, 2, 3, 4$



Offensichtlich ist $f(0) = 1$

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
Define yt(x) = (t - x) / sqrt(t^2 + x^2) Done
yt(0) sign(t)
yt(0) | t > 0 1
yt(0) | t > 0
MAIN DEG AUTO FUNC 3/30
    
```

Aufgabe 2b)

Bestimme zunächst die x-Koordinaten der Wendepunkte:

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
d^2/dx^2(yt(x)) (2*x^2 + 3*x*t - t^2) / (x^2 + t^2)^(5/2)
zeros(d^2/dx^2(yt(x)), x)
{((sqrt(17)-3)/4)*t, -(sqrt(17)+3)/4*t}
zeros(d<yt(x),x,2),x
MAIN DEG AUTO FUNC 5/30
    
```

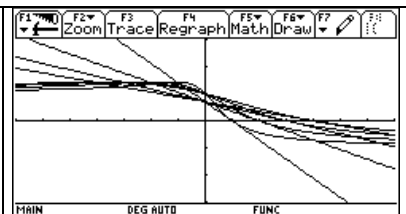
Die y-Koordinaten sind unabhängig von t, und es sind genau zwei verschiedene Werte möglich.

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
yt({((sqrt(17)-3)/4)*t, -(sqrt(17)+3)/4*t}) | t > 0
{-6*(sqrt(17)-7)/6, 6*(sqrt(17)+7)/6}
yt({((sqrt(17)-3)/4)*t, -(sqrt(17)+3)/4*t}) | t > 0
{.692447, 1.36156}
e<0=<(-sqrt(2)/(2*t))/(2*t)*t+u,u>|t>0
MAIN DEG AUTO FUNC 7/30
    
```

Aufgabe 2c)

Das ist die Grafik mit den Tangenten.
Man vermutet, dass sich die Tangenten auf der y-Achse schneiden.



Bestimme die Nullstelle $x = t$ und darin die Steigung.

Löse dann den Ansatz $y = mx + v$ nach v auf.

Man erkennt, dass v unabhängig ist von t .

Somit schneiden sich die Tangenten im Punkt $P\left(0 \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
yt({((sqrt(17)-3)/4)*t, -(sqrt(17)+3)/4*t}) | t > 0
zeros(yt(x), x) (t)
d/dx(yt(x)) | x = t and t > 0 -sqrt(2)/(2*t)
solve(0 = -sqrt(2)/(2*t)*t + v, v) | t > 0 v = sqrt(2)/2
e<0=<(-sqrt(2)/(2*t))/(2*t)*t+u,u>|t>0
MAIN DEG AUTO FUNC 10/30
    
```

Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte.	
Das Vektorprodukt der Richtungen der Lichtstrahlen gibt den Normalenvektor auf die Ebene durch AG parallel zu HP.	
Koordinatengleichung der Ebene durch AG: $8x + 3y + 11z - 118 = 0$ H in die HNF einsetzen. Abstand $d = 1.292$ (Ebene durch H und P hat Gleichung $8x + 3y + 11z + 100 = 0$)	

Aufgabe 3b)

Man hat 2 Richtungen, nämlich AP und HG. Das Vektorprodukt davon ergibt den Normalenvektor auf die Ebene ABCD. Oder $B(9 -19 11)$ A einsetzen. Man muss mit -6 ergänzen. Also stimmt $4x + y - z - 6 = 0$	
--	--

Aufgabe 3c)

Winkel zwischen PH und dem Normalenvektor auf ABCD, auf 90° ergänzen. Der gesuchte Winkel beträgt 54.736°	
---	--

Aufgabe 3d)

Lege das Lot von H aus auf die Ebene ABCD. Der Schnittpunkt ($t = -2$) ergibt $D(2 1 3)$. Der gespiegelte Punkt ($t = -4$) sei $Q(-6 -1 5)$.	
AD ist Normalenvektor auf die Ebene ABFE Die Koordinatengleichung der Ebene ABFE lautet $x + y + 5z - 45 = 0$. Bilde aus Q und P eine Gerade und schneide mit der Ebene ABFE. Der gesuchte Punkt ist $(9 -4 8)$	

Aufgabe 4a)

Speichere die Punkte und berechne den Mittelpunkt M

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	[14 13 -2] → a				[14 13 -2]
▪	[8 1 -14] → b				[8 1 -14]
▪	[-4 -5 -2] → c				[-4 -5 -2]
▪	[2 7 10] → d				[2 7 10]
▪	[13 -4 2] → s				[13 -4 2]
▪	$\frac{a+c}{2} \rightarrow m$				[5 4 -2]
(a+c)/2 → m					

Betrachte ABCD. Zeige, dass es ein Quadrat ist.
 AB und DC sind identisch. Damit ist es ein Parallelogramm.
 AB und AD sind gleich lang. Damit ist es ein Rhombus.
 AB und AD stehen senkrecht aufeinander. QED
 $AB \times AD$ ist parallel zu MS und zu $[2, -2, 1]^T$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	b - a				[-6 -12 -12]
▪	c - d				[-6 -12 -12]
▪	norm(b - a)				18
▪	norm(c - d)				18
▪	dotP(b - a, d - a)				0
▪	crossP(b - a, d - a)				[-216 216 -108]
▪	s - m				[8 -8 4]
S - m					

Die Koordinatengleichung von ABCD lautet
 $2x - 2y + z = 0$
 Die Koordinatengleichung von ABS lautet
 $14x - 2y - 5z - 180 = 0$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	s - m				[8 -8 4]
▪	[8 -8 4]				[2 -2 1]
▪	dotP([2 -2 1], a)				0
▪	crossP(b - a, s - a)				[-252 36 90]
▪	crossP(b - a, s - a)				[-18 14 -2 -5]
▪	dotP([14 -2 -5], a)				180
dotP([14, -2, -5], a)					

Aufgabe 4b)

Die Norm von $AB \times AS$ ist die Fläche von 2 Dreiecken.
 Dazu das Bodenquadrat.
 Oberfläche $O = 864$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	dotP([2 -2 1], a)				0
▪	crossP(b - a, s - a)				[-252 36 90]
▪	crossP(b - a, s - a)				[-18 14 -2 -5]
▪	dotP([14 -2 -5], a)				180
▪	norm([-252 36 90])				270
▪	$\frac{270}{2} \cdot 4 + 18^2$				864
ans(1)/2*4+18^2					

Aufgabe 4c)

Z liegt sicher auf der Geraden MS und der Kugelradius ist der Abstand von Z zu M.
 Bilde von der Ebene ABS die HNF und setze Z ein.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	$m + t \cdot (s - m) \rightarrow z$				[8·t+5 4-8·t 4·t-2]
▪	norm(z - m)				12· t
▪	$14 \cdot (8 \cdot t + 5) - 2 \cdot (4 - 8 \cdot t) - 5 \cdot (4 \cdot t - 2) - 180$				$\frac{36 \cdot (t - 1)}{5}$
(2)-180)/(norm([14, -2, -5]))					

Die beiden Abstände müssen gleich sein.
 Für $t = -3/2$ gibt es die Ankuigel (=Ersatzwert $Z(-7 | 16 | -8)$)
 Für $t = 3/8$ gibt es die Inkuigel.
 Also $Z(8 | 1 | -1/2)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	$\text{solve}\left(\frac{36 \cdot (t - 1)}{5} = 12 \cdot t, t\right)$				$t = -3/2$
▪	$z t = -3/2$				[-7 16 -8]
▪	$\text{solve}\left(\frac{36 \cdot (t - 1)}{5} = -12 \cdot t, t\right)$				$t = 3/8$
▪	$z t = 3/8$				[8 1 -1/2]
Z t = 3/8					

Aufgabe 4d)

$r = \|ZM\| = 9/2$.
 Kugelgleichung $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1/2)^2 = (9/2)^2$.
 Lege das Lot von Z auf die Ebene ABS und schneide.
 Berührungspunkt $(61/5 | 2/5 | -2) = (12.2 | 0.4 | -2)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	norm([8 1 -1/2] - m)				9/2
▪	$[8 1 -1/2] + t \cdot [14 -2 -5]$				$[14 \cdot t + 8 \ 1 - 2 \cdot t \ -5 \cdot t - 1/2]$
▪	$\text{solve}(14 \cdot (14 \cdot t + 8) - 2 \cdot (1 - 2 \cdot t) - 5 \cdot (-5 \cdot t - 1/2) = 81, t)$				$t = 3/10$
▪	$[8 1 -1/2] + t \cdot [14 -2 -5] t = 3/10$				$[61/5 \ 2/5 -2]$
...-1/2]]+t*[[14,-2,-5]] t=3/10					

Ersatzwert (Ankuigel)
 $r = \|ZM\| = 18$.
 Kugelgleichung $(x + 7)^2 + (y - 16)^2 + (z + 8)^2 = (18)^2 = 324$.
 Lege das Lot von Z auf die Ebene ABS und schneide.
 Berührungspunkt $(49/5 | 68/5 | -14) = (9.8 | 13.6 | -14)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
▪	norm([-7 16 -8] - m)				18
▪	$[-7 16 -8] + t \cdot [14 -2 -5]$				$[14 \cdot t - 7 \ 16 - 2 \cdot t \ -5 \cdot t - 8]$
▪	$\text{solve}(14 \cdot (14 \cdot t - 7) - 2 \cdot (16 - 2 \cdot t) - 5 \cdot (-5 \cdot t - 8) = 324, t)$				$t = 6/5$
▪	$[-7 16 -8] + t \cdot [14 -2 -5] t = 6/5$				$[49/5 \ 68/5 -14]$
...-16,-8]]+t*[[14,-2,-5]] t=6/5					

Aufgabe 5a)

Ziehen mit Zurücklegen (Binomialverteilung)
2.73%

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\sum_{x=5}^8 \left[nCr(8, x) \cdot (1/4)^x \cdot (3/4)^{8-x} \right] \cdot \frac{1789}{65536}$ $\sum_{x=5}^8 \left[nCr(8, x) \cdot (1/4)^x \cdot (3/4)^{8-x} \right] \cdot 0.027298$ $\left[(1/4)^x \cdot (3/4)^{8-x} \right], x, 5, 8$					

Aufgabe 5b)

Ziehen ohne Zurücklegen
90.18%

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\sum_{x=5}^8 \left[nCr(8, x) \cdot (1/4)^x \cdot (3/4)^{8-x} \right] \cdot 0.027298$ $\sum_{x=0}^3 \left[\frac{nCr(15, x) \cdot nCr(45, 8-x)}{nCr(60, 8)} \right] \cdot \frac{4661372}{5168931}$ $\sum_{x=0}^3 \left[\frac{nCr(15, x) \cdot nCr(45, 8-x)}{nCr(60, 8)} \right] \cdot 0.901806$ $\frac{nCr(45, 8-x)}{nCr(60, 8)}, x, 0, 3$					

Aufgabe 5c)

Bedingte Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit für den günstigen Pfad: $1/6 \cdot 0.0231$
Mögliche Pfade $1/3 \cdot 0.0231 + 2/3 \cdot 0.0167$
 $P(A | B) = 20.46\%$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(8, 5) \cdot (1/4)^5 \cdot (3/4)^3 \cdot \frac{189}{8192}$ $nCr(8, 5) \cdot (1/4)^5 \cdot (3/4)^3 \cdot 0.023071$ $\frac{nCr(15, 5) \cdot nCr(45, 3)}{nCr(60, 8)} \cdot 0.016655$ $\frac{1}{6} \cdot 0.0230712890625$ $1/3 \cdot 0.0230712890625 + 2/3 \cdot 0.0166545074794 \cdot 204604$ $1.2890625 + 2/3 * 0.0166545074794$					

Aufgabe 5d)

Das ist der Nenner aus Aufgabe 5c)
1.88%

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(8, 5) \cdot (1/4)^5 \cdot (3/4)^3 \cdot 0.023071$ $\frac{nCr(15, 5) \cdot nCr(45, 3)}{nCr(60, 8)} \cdot 0.016655$ $\frac{1}{6} \cdot 0.0230712890625$ $1/3 \cdot 0.0230712890625 + 2/3 \cdot 0.0166545074794 \cdot 204604$ $1/3 \cdot 0.0230712890625 + 2/3 \cdot 0.0166545074794 \cdot 0.18793$ $1/3 * 0.0230712890625 + 2/3 * 0.0166...$					

Aufgabe 5e)

Verallgemeinerung:

$$p_n = \frac{1}{3} \cdot \binom{8}{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{8-n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{15}{n} \cdot \binom{45}{8-n}}{\binom{60}{8}}$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$1/3 \cdot nCr(8, n) \cdot (1/4)^n \cdot (3/4)^{8-n} \cdot \frac{688905 \cdot 3^{-n}}{512 \cdot n! \cdot (8-n)!}$ $\frac{2/3 \cdot nCr(15, n) \cdot nCr(45, 8-n)}{nCr(60, 8)} \cdot \frac{1274506810953032860896378294321445039}{3127 \cdot n! \cdot (n+37)! \cdot (8-n)!}$ $\frac{1}{3} \cdot nCr(8, n) \cdot (1/4)^n \cdot (3/4)^{8-n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{nCr(15, n) \cdot nCr(45, 8-n)}{nCr(60, 8)}$					

$$E(X) = \sum_{n=0}^8 n \cdot p_n = 2$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$1/3 \cdot nCr(8, n) \cdot (1/4)^n \cdot (3/4)^{8-n} + 2/3 \cdot \frac{nCr(15, n) \cdot nCr(45, 8-n)}{nCr(60, 8)}$ $\frac{1274506810953032860896378294321445039}{3127 \cdot n! \cdot (n+37)! \cdot (8-n)!}$ $\sum_{n=0}^8 n \cdot \left[1/3 \cdot nCr(8, n) \cdot (1/4)^n \cdot (3/4)^{8-n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{nCr(15, n) \cdot nCr(45, 8-n)}{nCr(60, 8)} \right] \cdot n, 0, 8$					

Aufgabe 6a)

Das Integral ist von Hand zu lösen.

Also $f(x) = (x - 4)$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x$

und $g(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 1/x$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x \right) \cdot \ln(x) \Big|_1^8 - \int_1^8 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x \right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

Dann das hintere Integral ausrechnen,

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x \right) \cdot \ln(x) \Big|_1^8 - \int_1^8 \left(\frac{1}{2}x - 4 \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x \right) \cdot \ln(x) \Big|_1^8 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 4x \right) \Big|_1^8$$

schliesslich die Grenzen einsetzen:

$$= (32 - 32) \cdot \ln(8) - (...) \cdot \ln(1) - [(16 - 32) - (1/4 - 4)]$$

$$= 0 - 0 - [-16 - (-3.75)] = 12.25.$$

Calculator screen showing the integration of $\int_1^8 ((x-4) \cdot \ln(x)) dx$. The screen displays the integral expression, the antiderivative $\left(\frac{x^2}{2} - 4x\right) \cdot \ln(x) - \frac{x \cdot (x-16)}{4}$, and the result $49/4$.

Aufgabe 6b)

Hypothesentest: $H_0: p = 0.7$

Mittelwert $\mu = 1740.2$, also ist 1703 zu wenig.

$H_1: p < 0.7$.

$\sigma = 22.85$, $z = -1.628$

$\Phi(-1.628) = 0.052$

Also ist die Behauptung des Radiosenders gerade noch haltbar (aber sehr kritisch).

Calculator screen showing the calculation of the p-value. The screen displays the normal distribution function $\text{phi}(-1.628)$ and the result $.051751$.

Aufgabe 6c)

a_2 bis a_5 siehe rechts

Calculator screen showing the calculation of the first four terms of a sequence. The screen displays the terms $\frac{(-4+4i)^1}{2} + 5i$, $\frac{(-4+4i)^2}{2} + 5i$, $\frac{(-2+3i)^3}{2} + 5i$, and $\frac{(-3/2+4i)^4}{2} + 5i$.

Stelle drei Gleichungen auf und löse das Gleichungssystem.

$t = 8$, $p = -2 + 4i$, $q = i/2$.

Calculator screen showing the solution of a system of three equations. The screen displays the equations $-2+8i = p+tq$, $-4+4i = p+tq^2$, and $-2+3i = p+tq^3$, and the solution $t=8$, $p=-2+4i$, and $q=i/2$.