

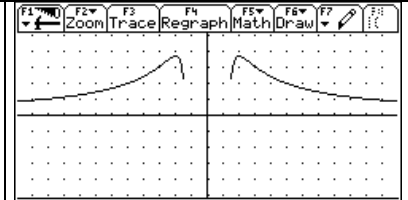
Lösung Matura 6D (2005)

Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion und lasse sie grafisch anzeigen.

Man erkennt sofort:

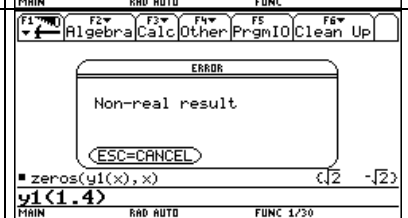
Die Kurve ist achsensymmetrisch (gerade Fkt),
horizontale Asymptote $y = 0$



Nullstellen ($\pm\sqrt{2} \mid 0$)
dazwischen ist $f(x)$ nicht definiert.

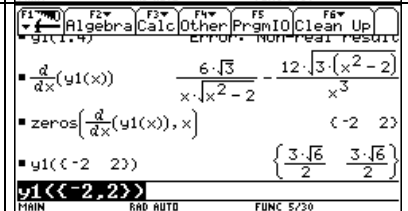
Also $D = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

und es gibt somit keine Polstellen, weil es keine einzelnen
Definitionslücken gibt.



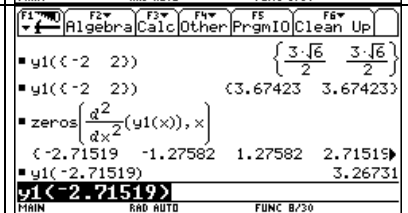
$y' = \dots$ (siehe rechts)

Maxima ($2 \mid 3.674$) sowie ($-2 \mid 3.674$)



Wendepunkte ($2.715 \mid 3.267$) und ($-2.715 \mid 3.267$)

Die anderen Werte für die Lösung der Gleichung $y'' = 0$ liegen
nicht im Definitionsbereich.

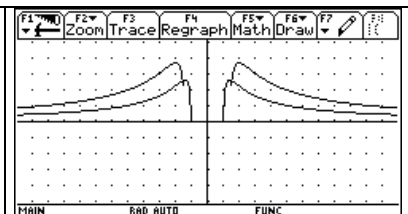


Aufgabe 1b)

Definiere $y_2(x) = f_3(x)$

Lasse die beiden Kurven anzeigen.

Beide Kurven gehen jeweils bis auf die x-Achse herunter.



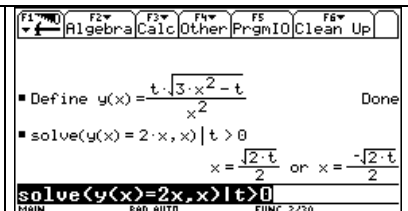
Aufgabe 1c)

Definiere $y(x)$ neu (allgemein)

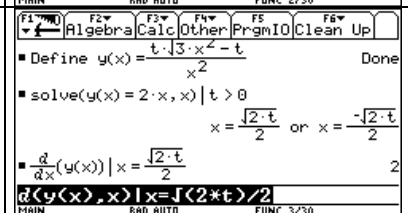
und schneide: $y(x) = 2x$

Das gibt die x-Werte der Schnittpunkte.

Für die weitere Betrachtung kommt nur der positive Wert von
 x in Frage



Wir zeigen, dass die $y'(x)$ an dieser Stelle $= 2$ ist, somit
berührt die Gerade $y = 2x$ die Kurve, und zwar unabhängig
vom Wert von t .



Aufgabe 1d)

Uneigentliches Integral fürs Volumen des Rotationskörpers:

Bestimme zuerst die Nullstellen (in Abhängigkeit von t)

Löse dann das Integral und setze es gleich 18π .

Das gibt sofort $t = 3$

The calculator screen displays the following steps:

- Top menu: Algebra, Calc, Other, PrgmIO, Clean Up
- Equation: $\frac{d}{dx} \sqrt{(x-t)^2} = \frac{2}{2}$
- Command: `zeros(y(x), x) | t > 0` resulting in $\left\{ \frac{-\sqrt{3-t}}{3}, \frac{\sqrt{3-t}}{3} \right\}$
- Equation: $\pi \cdot \int_{\frac{\sqrt{3-t}}{3}}^{\infty} (y(x))^2 dx = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3-t} \cdot t^{3/2}$
- Equation: `solve(2 * pi * sqrt(3-t) * t^(3/2) = 18 * pi, t)` resulting in $t = 3$
- Final command: `solve(2 * pi * sqrt(3) * t^(3/2) = 18 * pi, t)`
- Bottom status: MAIN, RAD AUTO, FUNC 5/30

Aufgabe 2a)

Die GR hat $a_1 = 20$ und $q = 19/20$
Das gibt genau 4 Meter Höhe

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
19/20 → q					19/20
20					400
1 - q					
20/(1-q)					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

Aufgabe 2b)

Die Oberfläche setzt sich zusammen aus
- dem Boden (400 cm^2),
- allen Deckelflächen (400 cm^2),
- 4 GR mit neuem $q = 361/400$ für die Seitenflächen.
Oberfläche insgesamt: 17210.3 cm^2 .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
19 ²					361
20 ² → q					400
20 ²					160000
1 - q					39
4 · 20 ²					17210.3
1 - q					
4 · 20² / (1 - q) + 400 + 400					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

Aufgabe 2c)

Jetzt bestimmen wir zuerst das Gesamtvolumen.
Das ist eine GR mit neuem $q = 19^3 / 20^3$.
Gesamtvolumen: 56091.1 cm^3 .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
19 ³					6859
20 ³ → q					8000
20 ³					64000000
1 - q					1141
20 ³					56091.1
1 - q					
20³ / (1 - q)					
MAIN RAD AUTO FUNC 8/30					

Dann lautet die Frage: wie viele Würfelvolumen müssen wir summieren, um das halbe Volumen zu erhalten?
Also abbrechende GR.
 $n = 4.504$, d.h. der 5. Würfel wird entzweigeschnitten
(und zwar ziemlich genau in halber Höhe)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
20 ³					64000000
1 - q					1141
20 ³					56091.1
1 - q					
solve((20³ · (1 - q)ⁿ) / (1 - q) = 56091.148115688 / 2, n)					
n = 4.50447					
> / (1 - q) = 56091.148115688 / 2 · n					
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30					

Aufgabe 2d)

Jetzt berechnen wir das Volumen der ersten 4 Würfel und subtrahieren das von der Hälfte des Gesamtvolumens.
 2263.84 cm^3 ist der Teil vom 5. Würfel, der in der unteren Hälfte verbleibt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
20 ³ · (1 - q ⁴)					1650030745779
1 - q					64000000
20 ³ · (1 - q ⁴)					25781.7
1 - q					
56091.148115688 / 2 - 20 ³ · (1 - q ⁴)					2263.84
1 - q					
56091.148115688 / 2 - 20³ · (1 - q⁴)					
MAIN RAD AUTO FUNC 12/30					

Dann benötigen wir noch die Kante des 5. Würfels:
 16.29 cm . Die Grundfläche dieses Würfels ist 16.29^2 .
Somit wird der 5. Würfel in Höhe $h = 8.53 \text{ cm}$ entzweigeschnitten. (wegen $V = G \cdot h$)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
1 - q					25781.7
56091.148115688 / 2 - 20 ³ · (1 - q ⁴)					2263.84
1 - q					
20 · (19/20) ⁴					16.2901
2263.843655047					8.53095
(16.290125) ²					
2263.843655047 / 16.290125 = 2					
MAIN RAD AUTO FUNC 14/30					

Für die Schnitthöhe addieren wir die ersten 4 Kanten und dazu die oben erhaltenen 8.53 cm .
Schnitthöhe 82.73 cm .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
20 · (19/20) ⁴					16.2901
2263.843655047					8.53095
(16.290125) ²					
20 · (1 - (19/20) ⁴)					
1 - 19/20					82.7285
4) / (1 - 19/20) + 8.5309539331197					
MAIN RAD AUTO FUNC 15/30					

Aufgabe 3a)

Speichere zuerst alle Punkte	
Koordinatengleichung: $2x + 2y - z + 5 = 0$ Der gekürzte Normalenvektor wird auch noch gespeichert. Wenn man S in die Koordinatengleichung einsetzt, erhält man sofort $t = 11$.	

Aufgabe 3b)

Betrachte die Vektoren AB, AS, BS. Wenn zwei davon senkrecht stehen (Skalarprodukt = 0), dann ist das Dreieck rechtwinklig. Jeweils auflösen nach t. $t = 25/3$ oder $t = -1/2$ oder $t = 4$ oder $t = 8$.	
---	--

Aufgabe 3c)

Der Winkel zwischen CS und dem Normalenvektor der Ebene muss 72.5° oder 102.5° betragen. Einsetzen in die Gleichung $\cos(72.5^\circ) = \dots$ ergibt $t = 6.757$ oder $t = 85.179$ (Es ist nur eine Lösung verlangt.)	
Wer vergisst, auf 90° zu ergänzen, hat die falschen Werte. (siehe unterste Linie)	

Aufgabe 3d)

Die Pyramidengrundfläche ist das Dreieck ABC und hat Fläche $27/2$. Daraus kann man die Pyramidenhöhe rechnen. $h = 4$. Also muss S von der Ebene Abstand 4 haben. In die HNF einsetzen ergibt $t = -1$ oder $t = 23$	
--	--

Aufgabe 4a)

Bestimme die HNF der Ebene: $(2x - y + 2z + 5)/3$
 Abstand von A: 9 aber A liegt auf der negativen Seite
 In der Figur zeigt der Normalenvektor n also nach unten.
 Also muss $P(-2 | 5 | -7)$ sein.
 Kontrolle mit HNF. Der Abstand ist 6.
 (Man kann auch das Lot von A auf ε mit k_1 schneiden.)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$[2 \ -1 \ 2] \cdot n$ [2 \ -1 \ 2] $\text{norm}(n)$ 3 $2 \cdot -4 - 6 + 2 \cdot -9 + 5$ -9 $\text{norm}(n)$ $[-4 \ 6 \ -9] \cdot n$ [-2 \ 5 \ -7] $2 \cdot -2 - 5 + 2 \cdot -7 + 5$ $\text{norm}(n)$ -6 $(2x - 2 - 5 + 2z - 7 + 5) / \text{norm}(n)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30					

Aufgabe 4b)

Bestimme die Gerade durch P mit Richtung v.
 Schnittpunkt $R(3 | 7 | -2)$
 Punkt N minus Normalenvektor n ergibt $N(1 | 8 | -4)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$[-2 \ 5 \ -7] + t \cdot [5 \ 2 \ 5]$ [5 \cdot t - 2 \ 2 \cdot t + 5 \ 5 \cdot t - 7] $\text{solve}(2 \cdot (5 \cdot t - 2) - (2 \cdot t + 5) + 2 \cdot (5 \cdot t - 7) + 5)$ $t = 1$ $[5 \cdot t - 2 \ 2 \cdot t + 5 \ 5 \cdot t - 7] t = 1$ [3 \ 7 \ -2] $[3 \ 7 \ -2] - n$ [1 \ 8 \ -4] $[3, 7, -2] - n$					
MAIN RAD AUTO FUNC 9/30					

Aufgabe 4c)

Spiegle P an der Ebene: Der gespiegelte Punkt sei Q.
 Dann ist $r = QR$
 Man hat $L(2 | 3 | -3)$, $Q(6 | 1 | 1)$
 $r = [-3, 6, -3]^T$. Diesen Vektor kann man kürzen zu
 $r = [-1, 2, -1]^T$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$[3 \ 7 \ -2] - n$ [1 \ 8 \ -4] $[-2 \ 5 \ -7] + t \cdot n$ [2 \cdot t - 2 \ 5 - t \ 2 \cdot t - 7] $\text{solve}(2 \cdot (2 \cdot t - 2) - (5 - t) + 2 \cdot (2 \cdot t - 7) + 5)$ $t = 2$ $[2 \cdot t - 2 \ 5 - t \ 2 \cdot t - 7] t = 2$ [2 \ 3 \ -3] $[2 \cdot t - 2 \ 5 - t \ 2 \cdot t - 7] t = 4$ [6 \ 1 \ 1] $[3 \ 7 \ -2] - [6 \ 1 \ 1]$ [-3 \ 6 \ -3] $[3, 7, -2] - [6, 1, 1]$					
MAIN RAD AUTO FUNC 14/30					

Aufgabe 4d)

Wenn die Kugeln aufeinandertreffen sollen, dann muss der Abstand der Zentren = 6 sein. Also drücke das Zentrum der einen Kugel aus mit einer Geraden.
 Für $t = 4$ treffen die Kugeln aufeinander.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$[3 \ 7 \ -2] - [6 \ 1 \ 1]$ [-3 \ 6 \ -3] $[-3 \ 6 \ -3]$ [1 \ 2 \ -1] $[1 \ 8 \ -4] + t \cdot [-1 \ 2 \ -1] + z$ [1 - t \ 2 \cdot t + 8 \ -t - 4] $[-7 \ 20 \ -10] + b$ [-7 \ 20 \ -10] $\text{solve}(\text{norm}(z - b) = 6, t)$ t = 26/3 or t = 4 $\text{solve}(\text{norm}(z - b) = 6, t)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 18/30					

Das Zentrum im Moment der Aufpralls ist $(-3 | 16 | -8)$.
 Der Berührungspunkt ist der Mittelpunkt zwischen diesem Punkt und B.
 Gesuchter Berührungspunkt $(-5 | 18 | -9)$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$[1 \ 8 \ -4] + t \cdot [-1 \ 2 \ -1] + z$ [1 - t \ 2 \cdot t + 8 \ -t - 4] $[-7 \ 20 \ -10] + b$ [-7 \ 20 \ -10] $\text{solve}(\text{norm}(z - b) = 6, t)$ t = 26/3 or t = 4 $z t = 4$ [-3 \ 16 \ -8] $1/2 \cdot ([-3 \ 16 \ -8] + b)$ [-5 \ 18 \ -9] $1/2 \cdot ([-3, 16, -8] + b)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 20/30					

Aufgabe 4d) mit den Ersatzwerten

Die Gerade von N aus mit Richtung r hat jetzt eine andere Form. Dass der Abstand der Zentren = 6 werden muss, bleibt.
 Man erhält $t = 3$ und das gibt dann die gleichen Ergebnisse wie oben.
 Zentrum $(-3 | 16 | -8)$. Berührungspunkt $(-5 | 18 | -9)$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrmIO	Clean Up	
$1/2 \cdot ([-3 \ 16 \ -8] + b)$ [-5 \ 18 \ -9] $[6 \ 13 \ -2] + t \cdot [-3 \ 1 \ -2] + z$ [6 - 3 \cdot t \ t + 13 \ -2 \cdot t - 2] $\text{solve}(\text{norm}(z - b) = 6, t)$ t = 41/7 or t = 3 $z t = 3$ [-3 \ 16 \ -8] $1/2 \cdot ([-3 \ 16 \ -8] + b)$ [-5 \ 18 \ -9] $1/2 \cdot ([-3, 16, -8] + b)$					
MAIN RAD AUTO FUNC 24/30					

Aufgabe 5a)

Einsetzen in die Formel für die Binomialverteilung
7.66%

Calculator screen showing the calculation of the binomial distribution probability for $n=30$, $p=0.3$, and $x=0$. The result is 0.076595.

Aufgabe 5b)

$E(X) = np = 22.5$
Also testet man für 22 oder 23 "Kopf"
22 "Kopf" ist am wahrscheinlichsten.

Calculator screen showing the calculation of the expected value $E(X) = np = 22.5$ and the probabilities for 22 and 23 successes. The result for 22 successes is 0.09995.

Aufgabe 5c)

Normalverteilung. $H_0: p = 0.3$, $H_1: p > 0.3$, weil 90 "Kopf"
eindeutig zu viel sind.
Man erhält $\mu = 75$, $\sigma = 7.25$, $z = 2.07$ und $s = 1.9\%$
Somit ist unser Verdacht berechtigt.
Man muss H_0 verwerfen. Die Münze ist wohl eine Fälschung.

Calculator screen showing the calculation of the z-score for a normal distribution. The result is $z = 2.0702$ and the probability $P(Z < 2.0702) = 0.980783$.

Aufgabe 5d)

Bedingte W'keit.
Der Pfad für die gefälschte Münze hat eine W'keit von 6.25%
Der Pfad für eine der drei Originale hat eine W'keit von 5.67%
 $P(A | B) = 52.43\%$

Calculator screen showing the calculation of the conditional probability $P(A|B) = 52.43\%$.

Aufgabe 5e)

$\Phi(z)$ muss 0.01 sein. $z = -2.326$.
 n ist die gesuchte Anzahl Versuche.
Drücke $\mu = 0.3n$ und σ durch n aus und löse die Gleichung für
die Normalverteilung auf nach n .
Man muss mindestens 405 Mal werfen.

Calculator screen showing the calculation of the number of trials n . The result is $n = 405$.

Aufgabe 6a)

8! 12! 4! 3!
(3! für die "Farbgruppen")

Calculator interface showing the calculation of $8! \cdot 12! \cdot 4! \cdot 3!$ resulting in 2781121609728000.

Aufgabe 6b)

Rechne günstige Fälle dividiert durch mögliche Fälle.
Den Ausdruck für die Gewinn-W'keit ableiten ...

Calculator interface showing the derivation of the profit function: $\frac{d}{dx} \left(\frac{nCr(8,2) \cdot nCr(x,1)}{nCr(8+x,3)} \cdot \frac{168 \cdot x}{(x+6) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} \right)$.

... und = 0 setzen.

Nur der Wert 3.468 ist sinnvoll. Also müssen es 3 oder 4 rote Kugeln sein.

Wenn man in der Gewinn-W'keit einsetzt, sieht man, dass das Maximum 2 Mal erreicht wird, also sind beide Werte ok.

Calculator interface showing the solving of the derivative equation: $\text{solve} \left(\frac{-168 \cdot (2 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 - 336)}{(x+6)^2 \cdot (x+7)^2 \cdot (x+8)^2} = 0, x \right)$ resulting in $x = 3.468006$ or $x = -6.40558$ or $x = -7.56$.

Aufgabe 6c)

Für den Gewinn kommen 7 Werte in Frage:
16 (doppelte 4), 1 (doppelte -1) und x^2 (doppelte x)
W'keit jeweils 1/36
-4 (einmal -1, einmal 4), 4x und -x, W'keit jeweils 2/36
0 für alle anderen Fälle.
Berechne E(X) und setze E(X) = 0.
Das ergibt $x = -3$.

Calculator interface showing the calculation of the expected value E(X) using the probability mass function $\text{dotP}(g, p)$ and solving $\text{solve}(\text{dotP}(g, p) = 0, x)$ resulting in $x = -3$.

Aufgabe 6d)

Zuerst muss man einige Folgenglieder ausrechnen.

$$a_2 = 3/2 = 1 + 1/2 = 2 - 1/2$$

$$a_3 = 5/3 = 1 + 2/3 = 2 - 1/3$$

usw.

Also vermutet man $a_n = (2n - 1)/n$

oder $a_n = 1 + (n - 1)/n$ oder auch $a_n = 2 - 1/n$

Verankerung: $a_1 = 1$ für alle drei Möglichkeiten ist ok.

Schritt: Notiere a_{n+1} und a_n und setze alles in die rekursive Definition ein.

Calculator interface showing the calculation of the first few terms of the sequence: $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} = 3/2$, $3/2 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 5/3$, $5/3 + \frac{1}{3 \cdot 4} = 7/4$, $7/4 + \frac{1}{4 \cdot 5} = 9/5$.

Calculator interface showing the recursive definition of the sequence: $\text{Define } a(n) = \frac{2 \cdot n - 1}{n}$ and $a(n+1) = a(n) + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.