

Mathematik

Klasse 6H

O. Riesen

1. Kurvenbetrachtungen

Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = (t^2 \cdot x + t) \cdot e^{-t \cdot x}$ eine Kurve gegeben.

- Setze $t = 2$ und führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.
D.h. diskutiere die Kurve zu $y = f_2(x) = (4 \cdot x + 2) \cdot e^{-2 \cdot x}$
[Verlangt werden: Definitionsbereich, Nullstellen, Asymptoten, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze mit Einheit 1 cm oder 2 Häuschen.]
- Bestimme [in Abhängigkeit von t] die Koordinaten des Wendepunktes von $y = f_t(x)$.
Auf welcher Kurve liegen alle diese Wendepunkte?
- Die Wendetangente von $y = f_t(x)$ soll durch den Punkt $P(0 | 1)$ gehen. Bestimme t .
- Berechne die im 1. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f_t(x)$ liegende Fläche [in Abhängigkeit von t].

2. Zahlenfolge

Eine Folge (a_n) ist rekursiv gegeben: $a_1 = 130$; $a_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot a_n + 3$

- Berechne die Folgenglieder a_2, a_3, a_4 und a_5 .
- Die explizite Definition dieser Folge hat die Form $a_n = p \cdot b^n + q$. Bestimme b, p, q .
- Diskutiere die Folge. [Monotonie/alternierend, Grenzen ($\inf = ?$ usw.), Grenzwert ($\lim = ?$), Summierbarkeit.]
- Betrachte die Folge (d_n) der Differenzen: $d_n = a_{n+1} - a_n$.
Beweise oder widerlege den Satz: "Bei der Folge (d_n) handelt es sich um eine GF".
- Wie viele Folgenglieder der Folge (a_n) sind grösser als 2.001?

3. Toblerone (Vektorgeometrie)

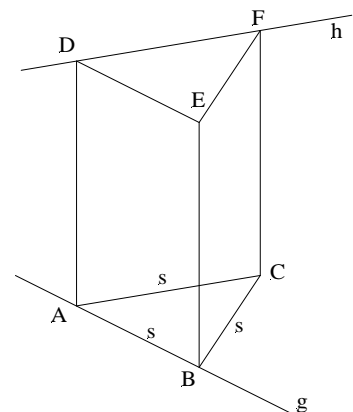
Gegeben sind die zwei windschiefen Geraden g und h .

$g: (10 | 5 | 2) (13 | 7 | 3)$ $h: (-10 | 12 | -1) (-6 | 10 | 5)$

Wie in der Skizze dargestellt, kann ein gerades, regelmässiges, dreiseitiges Prisma gebildet werden, von dem eine Kante AB auf g und eine Kante DF auf h liegt.

[Das Dreieck ABC ist gleichseitig und AD steht senkrecht zur Ebene ABC .]

- Weise nach, dass die Daten stimmen, d.h. dass der spitze Winkel zwischen g und h genau 60° beträgt.
- Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene ABC .
- Bestimme die Koordinaten der Ecken A und D .



[Wer c) nicht schafft, kann als Ersatz mit $A(7 | 3 | 1)$ und $D(-1 | 11 | 9)$ weiterarbeiten.]

Fortsetzung auf der zweiten Seite

- d) Die Grundkante s habe Länge $3 \cdot \sqrt{14}$. Bestimme die Koordinaten von B und C.
- e) Das Prisma hat eine Umkugel, welche durch alle 6 Eckpunkte geht. Bestimme die Gleichung dieser Umkugel.

4. **Hühnereier**

Eine Hühnerfarm verkauft Eier in Schachteln zu 30 Stück. Die Farm rechnet mit einer Ausschussrate von 5%, d.h. 5% der Eier sind unbrauchbar (Transportschäden, faule Eier usw.).

- a) Mit welcher W'keit enthält eine Schachtel nur ganze Eier.
- b) Wie gross ist die W'keit, dass in einer Schachtel mehr als 4 Eier unbrauchbar sind.
- c) Die Farm verkauft 10 verschiedenen Händlern je eine Schachtel Eier. Mit welcher W'keit erhalten genau drei dieser Händler lauter ganze Eier?
- d) Ein Kunde, der 12 Schachteln Eier gekauft hat, zählt beim Kontrollieren total 24 unbrauchbare Eier. Er behauptet, dass die von der Farm angegebene Ausschussrate von 5% zu niedrig angesetzt sei. Ist der Verdacht des Kunden berechtigt? ($\alpha = 5\%$)
- e) Ein Grossist benötigt für ein Jubiläum 777 ganze Eier. Wie viele Schachteln muss er kaufen, wenn er ein Risiko von 2% eingehen will (dass unter den gekauften Eiern weniger als 777 ganze sind)?

5. **Ein Spiel**

Ein Tourist spielt gegen einen Gaukler auf dem Jahrmarkt von Sikinien folgendes Spiel: Der Tourist "kauft" vom Gaukler Würfel und zahlt pro Würfel einen Dinar Einsatz. Alle Würfel sind symmetrisch. Dann darf der Tourist die "gekauften" n Würfel einmal miteinander werfen. Wenn er dabei *genau eine* 6 wirft, dann zahlt der Gaukler dem Touristen 31 Dinar zurück, andernfalls zahlt er nichts.

Natürlich möchte der Tourist möglichst viel gewinnen bei diesem Spiel.

- a) Löse zuerst für $n = 5$, d.h. der Tourist "kauft" 5 Würfel. Die Zufallsgrösse X bezeichne den Gewinn des Touristen. Berechne $E(X)$ und $V(X)$.
- b) Verallgemeinere. Berechne $E(X)$ in Abhängigkeit von n .
- c) Wie viele Würfel muss der Tourist "kaufen", damit sein Gewinn maximal wird? Und wie gross ist dieser maximale Gewinn?
- d) Für welchen Wert von n wird das Spiel fair?

6. **Abstände (Thema mit Variationen aus verschiedenen Gebieten)**

- a) Bestimme den Abstand des Punktes $A(6 \mid 1 \mid 7)$ von der Ebene $2x - y + 2z + 5 = 0$.
- b) Bestimme den Abstand des Punktes $B(3 \mid -1)$ vom Kreis $k: x^2 + y^2 - 8x - 4y - 12 = 0$.
- c) Bestimme den Abstand des Punktes $P(3 \mid 0)$ von der Kurve $y = \ln(x)$.
- d) Bestimme den Abstand der Geraden $y = -3x + 12$ von der Kurve $y = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$.
