

# Mathematik

Klassen 6E und 6F

O. Riesen

## 1. Kurvenbetrachtungen

Für jedes  $t > 0$  ist durch  $y = f_t(x) = \ln(x^2 + t)$  eine Kurve gegeben.

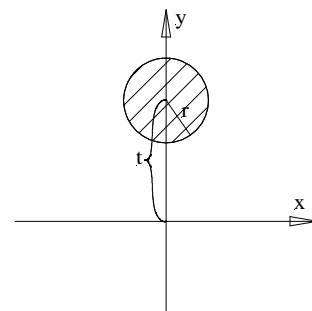
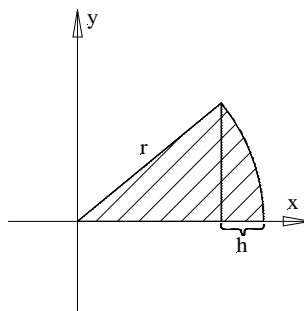
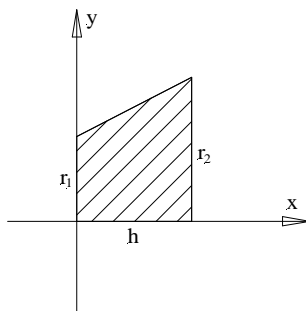
Rechne soweit möglich mit exakten Werten.

- Betrachte zunächst die Kurve  $y = f_{\frac{1}{4}}(x)$ , d.h. setze  $t = \frac{1}{4}$ .  
Führe eine Kurvendiskussion durch.  
[Gedankenstütze: Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremalstellen, Wendepunkte, Skizze mit Einheit 1 cm oder 2 Häuschen.]
- Wie gross muss  $t$  sein, damit die Wendetangente an die Kurve  $y = f_t(x)$  durch den Koordinatenursprung geht?
- Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte der Kurven  $y = f_t(x)$ ?

## 2. Rotationskörper

Die einzelnen Teilaufgaben sind voneinander unabhängig. Bei dieser Aufgabe sind die verwendeten Funktionen und Integrale genau zu notieren, d.h. die Dokumentation des Lösungswegs ist sehr wichtig.

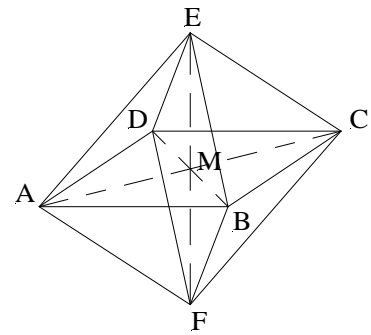
- Die im 1. Quadranten unterhalb der Kurve  $y = f(x) = x \cdot \sqrt{5-x^2}$  liegende Fläche rotiert um die  $x$ -Achse und bildet einen tropfenförmigen Körper. Wie gross ist sein Volumen?
- Das skizzierte Trapez (Figur unten links) rotiert um die  $x$ -Achse und bildet dadurch einen Kegelstumpf. Bestimme dessen Volumen.
- Der gezeichnete Kreissektor (Figur unten Mitte) rotiert um die  $x$ -Achse und bildet somit einen Kugelsektor. Berechne dessen Volumen.
- Wenn der gezeichnete Kreis (Figur unten rechts) um die  $x$ -Achse rotiert, dann entsteht ein sogenannter Torus ("Schwimmring"). Berechne dessen Volumen.



### 3. Vektorgeometrie

Wir betrachten ein reguläres Oktaeder (siehe die Figur: alle Seitenkanten sind gleich lang; die Vierecke ABCD, AFCE und BEDF sind Quadrate).

Man kennt die Ecke  $A(11 \mid 3 \mid 11)$  und weiss, dass die Diagonale EF auf  $g: (4 \mid 1 \mid 3) (6 \mid -1 \mid 4)$  liegt.



- Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte des Oktaeders. Hinweis: bestimme zuerst das Zentrum M.
- Bestimme die Gleichung der Umkugel, d.h. der Kugel, welche durch alle Eckpunkte des Oktaeders geht.
- Das Oktaeder hat auch eine Inkugel, welche alle Seitenflächen berührt. Bestimme deren Gleichung.

### 4. Minima und Maxima (Thema mit Variationen)

Gegeben ist das Dreieck  $A(1 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B(-1 \mid 0 \mid 1)$ ,  $C(0 \mid t \mid 0)$

Die einzelnen Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

- Wo muss C liegen, damit das Dreieck möglichst kleine Fläche hat? Bestimme diese minimale Fläche.
- Wo muss C liegen, damit der Umfang des Dreiecks möglichst klein wird?
- Wo muss C liegen, damit der Winkel  $\alpha$  minimal wird und wie gross ist dann  $\alpha$ ? (Hinweis: Berechne den Extremalwert für  $\cos(\alpha)$ .)
- Wie gross kann der Winkel  $\alpha$  höchstens werden und wo müsste dann C liegen?

### 5. Jahrmarkt in Sikinien

Auf dem Jahrmarkt in Sikinien befindet sich eine Schale mit 12 Kugeln, nämlich 6 weisse, 5 rote und eine schwarze Kugel. Vier "sehr faire" Gaukler bieten dir je ein Spiel an, bei dem du Kugeln zufällig ziehen musst und die Höflichkeitsregeln in Sikinien erlauben es nicht, alle Spiele abzulehnen.

Gaukler A sagt: "Du ziehst zwei Kugeln mit Zurücklegen. Wenn die zwei Kugel verschiedene Farben haben, dann gewinnst du 3 Dinar; wenn die zwei Kugeln gleiche Farbe haben, dann verlierst du 4 Dinar."

Gaukler B sagt: "Du ziehst drei Kugeln mit Zurücklegen. Wenn du mindestens zwei rote Kugeln erwischst, dann gewinnst du 5 Dinar, andernfalls gewinne ich 3 Dinar."

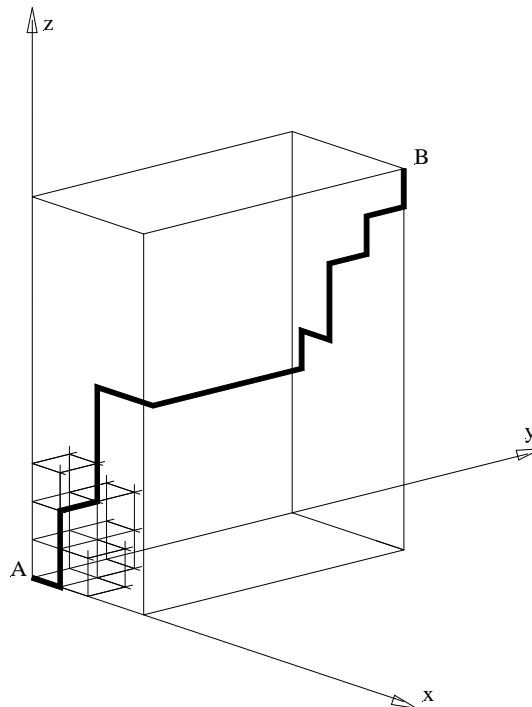
Gaukler C sagt: "Du ziehst Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen so lange, bis du eine rote oder die schwarze ziehst, jedoch höchstens dreimal. Erscheint die schwarze Kugel (bevor du eine rote Kugel erwischst), dann verlierst du sofort 8 Dinar und das Spiel ist zu Ende. Erscheint eine rote Kugel in der ersten (resp. zweiten resp. dritten) Ziehung, so gewinnst du 1 Dinar (resp. 2 Dinar resp. 3 Dinar) und das Spiel ist zu Ende. Erscheinen in den drei Ziehungen weder eine rote noch die schwarze Kugel, so gewinnst du nichts."

Gaukler D sagt: "Als erstes zahlst du mir 2 Dinar Einsatz. Dann darfst du drei Kugeln mit einem Griff ziehen. Pro vorgekommene Farbe zahle ich dir einen Dinar zurück."

Begründe ausführlich, gegen welchen der vier Herren du antreten wirst. Es ist wohl klar, dass du mit möglichst grossem Gewinn nach Hause gehen willst.

## 6. Kurzaufgaben aus verschiedenen Gebieten

- Eine arithmetische Folge  $(a_n)$  beginnt wie folgt: 90, 88.8, 87.6, 86.4, 85.2, 84, ...  
Wie viele Folgenglieder sind zu summieren, damit die Summe grösser wird als 2500?
- Ein Glücksrad zeigt nur die Zahlen "0" und "1", wobei die Wahrscheinlichkeit für "1" mit 0.35 angegeben wird. Aufgrund einiger Beobachtungen haben wir den Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit für eine "1" kleiner ist. Das Rad wird 580 mal gedreht. Ab wie wenig Einsen wird unser Verdacht bestätigt? ( $\alpha = 5\%$ )
- Gegeben sind die drei Ebenen  $\varepsilon_1: 2x - 5y + z + 15 = 0$ ,  $\varepsilon_2: x - 7y - z + 39 = 0$  und  $\varepsilon_3: 3x + 4z - 30 = 0$ . Weise nach, dass die drei Ebenen sich in einer gemeinsamen Geraden schneiden.
- Ein Geo-Käfer startet im Punkt  $A(0 \mid 0 \mid 0)$  und wandert entlang der Gitterlinien (die Figur illustriert die Situation) auf einem der möglichen kürzesten Wege zum Punkt  $B(4 \mid 7 \mid 10)$ . Alle Wege seien gleich wahrscheinlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit meidet der Käfer auf seinem Weg den Punkt  $P(2 \mid 3 \mid 4)$ ?



\*\*\*\*\*